Z. elektr. Inform.- u. Energietechnik, Leipzig 13 (1983) 2, S. 182—188

Mitteilung aus der Sektion Informationstechnik der Technischen Universität Dresden

Die Äquivalenzklassenbildung für mehrwertige Funktionen am Beispiel der ternären Funktionen von zwei Variablen

Von *J. Todorow* [1]

Mit 1 Tabelle

(Eingegangen am 15. Mai 1982)

1. Einführung

Die stürmische Entwicklung der Mikroelektronik stellt hohe Anforderungen bei der Einführung neuer Entwurfsprinzipien für digitale Systeme. Eingedenk dessen erfahren die Schwellwertlogik sowie die mehrwertige Logik eine breite Anwendung bei der Lösung zukünftiger Entwurfsaufgaben. Prinzipielle Entwurfsalgorithmen, die auf den genannten Logikkonzeptionen basieren, bedienen sich orthogonaler Transformationsmethoden (Spektraltechniken) und in einem wachsenden Umfang der Äquivalenzklassenbildung für die jeweils zu realisierenden Logikfunktionen (zwei- oder mehrwertig). Zu diesem letztgenannten Problemkreis ist bereits zum Entwicklungsbeginn der digitalen Rechenanlagen eine Vielzahl von Untersuchungen entstanden. Für die Äquivalenzklassenbildung zweiwertiger Funktionen wird von *Ninomiya* [2] eine Methode vorgeschlagen, die auf Vollführung linearer Transformationen auf ihren Definitions- und Wertebereich begründet ist. Sie liefert die kompakteste Klassifikation solcher Funktionen.

In der vorliegenden Schrift wird eine Äquivalenzrelation für die Menge der mehrwertigen Funktionen vorgeschlagen. Es ist somit möglich, für allgemeine mehrwertige Funktionen Äquivalenzoperationen zu definieren, und ihre Auswirkung auf das komplexe Rademacher-Walsh-Spektrum dieser Funktionen zu betrachten. Als ein Ergebnis wird eine Tabelle der 16 kanonischen Spektren (Repräsentanten einer Äquivalenzklasse) für die insgesamt 19683 ternären Funktionen von zwei Variablen angegeben. Im Vergleich zu bestehenden Klassifikationsmethoden für dreiwertige Funktionen, wie unter [1] mit Angabe von 84 Äquivalenzklassen für die gleiche Funktionenmenge, ist die hier vorgestellte wesentlich kompakter.

2. Bezeichnungen und Definitionen

Es wird das diskrete statische System $S = (X, Y, T, f)$ betrachtet mit darauf definierten Abbildungen $f\colon X \to Y \subseteq \mathbb{Z}_q$ (mehrwertige Funktion). $\mathbb{Z}_q$ ist die Menge der ganzen Zahlen modulo q. Auf dieser Menge fungieren die Addition $\oplus^q$ und die Multiplikation $\cdot^q$ modulo q als zweistellige Operationen. T ist eine q-elementige Menge von diskreten Zeitpunkten $t \in T$. Es sei desweiteren $\Xi_q = \{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{q-1}\}$, $\varepsilon = \exp(2\pi \mathrm{j}/q)$, die Menge der q Einheitswurzeln mit den zweistelligen Operationen Multiplikation $\varepsilon^i \bigcirc \varepsilon^k = \varepsilon^{i \oplus^q k}$ und Addition $\varepsilon^i + \varepsilon^k = \varepsilon^{i \cdot^q k}$. In analoger Weise wird ein komplexes diskretes statisches System $\tilde{S} = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{T}_c, \tilde{f})$ mit der komplexen q-wertigen Funktion

[1] Dipl.-Ing. *Juri Todorow*, Sektion Informationstechnik, Bereich Bauelemente und Systeme, TU Dresden, DDR-8027 Dresden, Mommsenstraße 13.

$\tilde{f}$: $\tilde{X} \to \tilde{Y} \subseteq \mathbb{E}_q$ definiert. Die bijektive Abbildung φ: $\mathbb{Z}_q \to \mathbb{E}_q$ begründet die Isomorphie zwischen S und $\tilde{S}$. T_c ist eine Menge von q^n komplexen diskreten Zeitpunkten.

Es seien $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{v}}$ k-dimensionale Vektoren über $\mathbb{Z}_q^k$ bzw. $\mathbb{E}_q^k$. Zwischen ihnen werden die folgenden Operationen definiert: Vektormultiplikation in $\mathbb{Z}_q$:

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{mod} q \, (u_i \cdot {}^q v_i). \tag{1}$$

Komponentenweise modulo-q-Addition von Vektoren:

$$\boldsymbol{u} \oplus^q \boldsymbol{v} = (u_0 \oplus^q v_0, \ldots, u_{k-1} \oplus^q v_{k-1}). \tag{2}$$

Vektormultiplikation in $\mathbb{E}_q$:

$$\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} = (\tilde{u}_0 + \tilde{v}_0) \circ \ldots \circ (\tilde{u}_{k-1} + \tilde{v}_{k-1}). \tag{3}$$

Komponenteweise Multiplikation (Wortprodukt):

$$\tilde{\boldsymbol{u}} \vartriangle \tilde{\boldsymbol{v}} = (\tilde{u}_0 \circ \tilde{v}_0, \ldots, \tilde{u}_{k-1} \circ \tilde{v}_{k-1}). \tag{4}$$

Skalarprodukt[2]:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=0}^{k-1} (\tilde{u}_i \circ \tilde{v}_i). \tag{5}$$

Die Erweiterung der definierten Operationen auf Matrizen ist offensichtlich.

3. Die Äquivalenzrelation

Es seien f, g: $X \to Y$ beliebige q-wertige Funktionen von n Variablen $x_i \in \mathbb{Z}_q$, $i = 1, \ldots, n$. Für sie gelte der folgende Zusammenhang für alle $\boldsymbol{x} \in X$:

$$f(\boldsymbol{x}) = g\,[(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{b}] \oplus (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{c}) \oplus d \pmod q. \tag{6}$$

Darin ist $\boldsymbol{A}$ eine nichtsinguläre $(n \times n)$-Matrix mit $a_{ik} \in \mathbb{Z}_q$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ sind n-dimensionale Vektoren mit $b_i, c_i \in \mathbb{Z}_q$, $i, k = 1, \ldots, n$ und $d \in \mathbb{Z}_q$. Durch $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{b}$ wird auf dem Definitionsbereich von g eine lineare Transformation $X \to X'$ vollzogen. Die modulo-q-Addition linearer Polynome $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{c}) \oplus d$ auf dem Wertebereich von g ruft ebenfalls eine lineare Transformation $Y \to Y'$ hervor.

Es sei nun g: $X' \to Y'$ eine bekannte q-wertige Funktion, auf deren Definitions- und Wertebereich die beschriebenen Transformationen einwirken, und f: $X \to Y$ eine beliebige q-wertige Funktion. Kann für alle $(\boldsymbol{x}, y) \in X \times Y$ vermittels der Abbildung L: $X \times Y \to X' \times Y'$ mit

$$L(\boldsymbol{x}, y) = (\boldsymbol{x}, y) \otimes \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (\boldsymbol{b}, d) \pmod q = (\boldsymbol{x}', y') \tag{7}$$

eine eindeutige Zuordnung von Wertepaaren $(\boldsymbol{x}', y') \in X' \times Y'$ vermittelt werden, dann sind f und g zueinander äquivalent, $f \diagup\!\!\diagdown\!\!\diagup g$. Durch L: $X \times Y \to X' \times Y'$ wird auf der Menge der q-wertigen Funktionen F einer bestimmten Variablenzahl eine Äquivalenzrelation induziert, welche die Zerlegung von F in endlich viele Äquivalenzklassen bewirkt. Es lassen sich folgende grundlegende Äquivalenzoperationen für q-wertige Funktionen definieren:

a) Variablentranslation:

$$L(\boldsymbol{x}, y) = (\boldsymbol{x}, y) \otimes \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{A}, y). \tag{8}$$

(Ist $\boldsymbol{A}$ eine Permutationsmatrix, so erhält man die Variablenpermutation als eine ableitbare Äquivalenzoperation.)

---

[2] Die Einführung von komplexen Logikwerten aus $\mathbb{E}_q$ ermöglicht die Definition des Skalarproduktes für q-wertige Funktionen.

b) disjunkte Variablentranslation

$$L(\boldsymbol{x}, y) = (\boldsymbol{x}, y) \otimes \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}, y \oplus (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{c})). \tag{9}$$

($\boldsymbol{E}$ bezeichnet hier die Einheitsmatrix)

c) verallgemeinerte Komplementierung der Funktion

$$L(\boldsymbol{x}, y) = (\boldsymbol{x}, y) \otimes \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (0, d) = (\boldsymbol{x}, y \oplus d). \tag{10}$$

d) verallgemeinerte Komplementierung der Variablen

$$L(\boldsymbol{x}, y) = (\boldsymbol{x}, y) \otimes \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (\boldsymbol{b}, 0)$$
$$= (\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}, y). \tag{11}$$

Durch Variation der Konstanten $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und d ist es möglich, aus einer vorgegebenen q-wertigen Funktion, alle zu ihrer Äquivalenzklasse gehörenden Funktionen herzuleiten.

4. Auswirkungen der Äquivalenzoperationen auf das komplexe Rademacher-Walsh-Spektrum

Die komplexen Walsh-Funktionen sind Abbildungen $\tilde{w}_q\colon \Omega_c \times T_c \to E_q$ mit der Definitionsgleichung

$$\tilde{w}_q(\omega_c, t_c) = \boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{t}_c \text{ [3]}. \tag{12}$$

Ω_c ist eine komplexe Sequenzmenge, $\omega_c \in \Omega_c$ — komplexe Sequenz. Für ω_c bzw. t_c existieren die q-nären Darstellungen über $\mathbb{E}_q$, $\boldsymbol{\omega}_c$ und $\boldsymbol{t}_c$. Eine Untermenge der komplexen Walsh-Funktionen bilden die komplexen Rademacher-Funktionen $\tilde{\boldsymbol{w}}_q^{\mathrm{R}}(\omega_{c0}^{\mathrm{R}}) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 = 1$, $\tilde{\boldsymbol{w}}_q^{\mathrm{R}}(\omega_{c1}^{\mathrm{R}}) = \tilde{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{w}}_q^{\mathrm{R}}(\omega_{cn}^{\mathrm{R}}) = \boldsymbol{x}_n$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \in \tilde{X} \times T_c$, $i = 1, \ldots, n$; $\omega_{c0}^{\mathrm{R}}, \ldots, \omega_{cn}^{\mathrm{R}}$ sind die komplexen Rademacher-Sequencen. Die komplexen Walsh-Funktionen können durch Rademacher-Funktionen ausgedrückt werden:

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_q(\omega_c) = \tilde{\boldsymbol{w}}_q(\omega_{ci}^{\mathrm{R}}) \vartriangle \ldots \vartriangle \tilde{\boldsymbol{w}}_q(\omega_{ck}^{\mathrm{R}}),$$
$$\text{für} \quad \boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega}_{ci}^{\mathrm{R}} \vartriangle \ldots \vartriangle \boldsymbol{\omega}_{ck}^{\mathrm{R}}, i, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{13}$$

Die Werte der so berechneten Walsh-Funktionen können in der orthogonalen $(n \times n)$-Matrix $\tilde{\boldsymbol{W}}_q^{\mathrm{R}}$ mit der definierten Rademacher-Zeilenordnung zusammengestellt werden. Die komplexen Walsh-Funktionen bilden eine orthogonale Basis für die q-wertigen Funktionen $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$. Es sei $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \tilde{Y} \times T_c$, dann gilt:

$$\tilde{\boldsymbol{R}} = \tilde{\boldsymbol{y}}\, \tilde{\boldsymbol{W}}_{q\mathrm{R}}^{*}\,{}^{3}$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}} = q^{-n}\, \tilde{\boldsymbol{R}}\, \tilde{\boldsymbol{W}}_{q\mathrm{R}}'\,{}^{4}. \tag{14}$$

Das Gleichungspaar (14) stellt die Transformations- und Rücktransformationsgleichungen der komplexen Rademacher-Walsh-Transformation dar. Für das Spektrum $\tilde{\boldsymbol{R}}$ gilt die Bezeichnungsweise: $\tilde{\boldsymbol{R}} = (\tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_n, \tilde{R}_{11}, \ldots, \tilde{R}_{(n-1)n}, \ldots, \tilde{R}_{1\ldots n})$. Die Indizierung der Spektralkoeffizienten verdeutlicht deren Zugehörigkeit zum entsprechenden Rademacher-Funktionen-Produkt, die Anzahl der Indizes gibt die Spektralkoeffizientenordnung an. Für $q = 3$, $n = 2$ gilt: $\tilde{\boldsymbol{R}} = (\tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_{11}, \tilde{R}_{22}, \tilde{R}_{12}, \tilde{R}_{122}, \tilde{R}_{112}, \tilde{R}_{1122})$.

---

[3] *: konjugiert komplex.

[4] ': transponierte Matrix.

Die Spektralkoeffizienten $\tilde{R}_i$ sind i.a. komplexe Zahlen mit einem geringstmöglichen Wert $-q^n$ und einem größtmöglichen Wert $+q^n$. Für $q = 3$ gilt die Darstellung

$$\tilde{R}_i = (\mathrm{Re}\,\{\tilde{R}_i\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,\{\tilde{R}_i\}) + \varepsilon\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,\{\tilde{R}_i\}\right). \tag{15}$$

Um die Auswirkungen von Äquivalenzoperationen auf das komplexe Rademacher-Walsh-Spektrum mehrwertiger Funktionen analysieren zu können, wird Gl. (7) wie folgt umgeschrieben:

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (,\tilde{x}\ \tilde{y}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{A} & c \\ \varepsilon^0 & \varepsilon^1 \end{pmatrix} \vartriangle (\tilde{b}, \tilde{d}). \tag{16}$$

Die Werte für die Konstanten $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ und $\tilde{d}$ werden durch Verwirklichung der eindeutigen Zuordnungsvorschrift $\varphi\colon i \mapsto \varepsilon^i$, $i \in \mathbb{Z}_q$, $\varepsilon^i \in \mathbb{E}_q$, erhalten. Für die in den Gl. (8—11) definierten Äquivalenzoperationen für mehrwertige Funktionen ergeben sich die entsprechenden Beziehungen auf dem Spektralbereich der komplexen Rademacher-Walsh-Transformation. Mit $\hat{g}(\omega_c)$ für alle $\omega_c \in \Omega_c$ wird nachfolgend das Spektrum einer bekannten komplexen q-wertigen Funktion $\tilde{g}\colon \tilde{X}' \to \tilde{Y}' \subseteq \mathbb{E}_q$ bezeichnet. $\tilde{\boldsymbol{E}}$ ist eine Einheitsmatrix mit Diagonalelementen ε^1, sonst ε^0.

a) Variablentranslation

$$\hat{L}(\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) = (\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{A}' & \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 & \varepsilon^1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \tilde{A}', \hat{g}). \tag{17}$$

Die transponierte Matrix $\tilde{A}'$ bewirkt auf dem Spektralbereich die Vertauschung von Spektralkoeffizienten erster Ordnung mit solchen höherer Ordnung, der Spektralkoeffizient 0-ter Ordnung bleibt unverändert. Im Falle der Permutationsoperation werden nur Spektralkoeffiziente gleicher Ordnung miteinander vertauscht.

b) disjunkte Variablentranslation

$$\begin{aligned}\hat{L}(\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) &= (\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}} & \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 & \varepsilon^1 \end{pmatrix} \vartriangle (\tilde{\boldsymbol{c}}, \varepsilon^0) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_c \vartriangle \tilde{\boldsymbol{c}}, \hat{g}).\end{aligned} \tag{18}$$

Hierbei wird der Spektralkoeffizient 0-ter Ordnung mit Spektralkoeffizienten höherer Ordnung permutiert.

c) verallgemeinerte Komplementierung der Funktion

$$\begin{aligned}\hat{L}(\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) &= (\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}} & \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 & \varepsilon^1 \end{pmatrix} \vartriangle (\varepsilon^0, \tilde{d}) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g} \circ \tilde{d}).\end{aligned} \tag{19}$$

Es erfolgt eine Multiplikation aller Spektralkoeffizienten mit $\tilde{d} \in \mathbb{E}_q$.

d) verallgemeinerte Komplementierung der Variablen

$$\begin{aligned}\hat{L}(\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) &= (\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}} & \varepsilon^0 \\ \varepsilon^0 & \varepsilon^1 \end{pmatrix} \vartriangle (\varepsilon^0, \tilde{w}_q^*(\boldsymbol{\omega}_c, \tilde{\boldsymbol{b}}^*)) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_c, \hat{g} \circ \tilde{w}_q^*(\boldsymbol{\omega}_c, \tilde{\boldsymbol{b}}^*)).\end{aligned} \tag{20}$$

Ausgewählte Spektralkoeffizienten werden mit Werten aus $\mathbb{E}_q$ multipliziert.

Die angegebenen Beziehungen können bei Benutzung der Regeln der komplexen Rademacher-Walsh-Transformation und der Eigenschaften der komplexen Walsh-Funktionen [3] leicht verifiziert werden. Die ausführlichen Beweise sind in [4] zu finden.

Offenbar definiert die Abbildung $\hat{L}\colon \Omega_c \times C \to \Omega_c \times C'$ (C' ist die Menge von komplexen Spektralkoeffizienten für die transformierte Funktion $\tilde{g}\colon \tilde{X}' \to \tilde{Y}'$) eine lineare Transformation auf dem Spektralbereich der komplexen Rademacher-Walsh-Transformation in analoger Weise, wie $L\colon X \times Y \to X' \times Y'$ eine lineare Transformation auf dem Definitions- und Wertebereich q-wertiger Funktionen definiert. $\hat{L}$ induziert in die Menge aller komplexen Rademacher-Walsh-Spektren $\tilde{R}$ der q-wertigen Funktionen einer bestimmten Variablenzahl eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen von $\tilde{R}$ werden durch ein kanonisches Spektrum $\tilde{\boldsymbol{R}}^k$ repräsentiert, dessen Spektralkoeffizienten erster Ordnung die betragsgrößten Werte besitzen, und für die folgende Beziehungen erfüllt sind:

$$|\tilde{R}_0| \geqq |\tilde{R}_1| \geqq \dots \geqq |\tilde{R}_n| \geqq 0 \tag{21}$$

$$\arg \varepsilon \geqq \arg \tilde{R}_i \geqq 0, \quad i = 0, \dots, n. \tag{22}$$

Über die Rücktransformationsgleichung der komplexen Rademacher-Walsh-Transformation ist die Bestimmung der entsprechenden kanonischen Funktion aus F (Menge der q-wertigen Funktionen einer bestimmten Variablenzahl) gesichert, die ein Repräsentant der entsprechenden unter L induzierten Äquivalenzklasse verkörpert.

Die Äquivalenzklassenbestimmung auf dem Spektralbereich der komplexen Rademacher-Walsh-Transformation besitzt den wesentlichen Vorteil, daß für die Spektren der transformierten q-wertigen Funktionen eine größere Wertemenge komplexer Zahlen zur Verfügung steht, als für diese Funktionen selbst mit ihrem enger beschränkten Wertebereich $\mathbb{Z}_q$. Damit enthält dieses Spektrum einen größeren Informationsgehalt über die Äquivalenzklassenzugehörigkeit der transformierten Funktion, als diese mit q Werten aus $\mathbb{Z}_q$ zu vermitteln imstande ist.

5. Zur Ermittlung der kanonischen Spektren für die ternären Funktionen von zwei Variablen

Tabelle 1. Kanonische Spektren der ternären Funktionen von zwei Variablen

Nr.	$\tilde{R}_0$	$\tilde{R}_1$	$\tilde{R}_2$	$\tilde{R}_{11}$	$\tilde{R}_{22}$	$\tilde{R}_{12}$	$\tilde{R}_{122}$	$\tilde{R}_{112}$	$\tilde{R}_{1122}$
1	9	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$8 + \varepsilon$	$2 + \varepsilon$	$2 + \varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$2 + \varepsilon$
3	$1 + 8\varepsilon$	$1 + 2\varepsilon$	$1 + 2\varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	$1 + 2\varepsilon$
4	$7 + 2\varepsilon$	$4 + 2\varepsilon$	$1 + 2\varepsilon$	$-2 - 4\varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	$1 + 2\varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$1 - \varepsilon$
5	$2 + 7\varepsilon$	$2 + 4\varepsilon$	$2 + \varepsilon$	$-4 - 2\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$2 + \varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 + \varepsilon$
6	6	3	3	0	0	0	-3	-3	3
7	$6 + 3\varepsilon$	$6 + 3\varepsilon$	0	$-3 - 6\varepsilon$	0	0	0	0	0
8	$6 + 3\varepsilon$	$3 + 3\varepsilon$	$3 + 3\varepsilon$	$-3 - 3\varepsilon$	$-3 - 3\varepsilon$	3	0	0	-3ε
9	$3 + 6\varepsilon$	$3 + 3\varepsilon$	$3 + 3\varepsilon$	$-3 - 3\varepsilon$	$-3 - 3\varepsilon$	-3ε	0	0	-3
10	$5 + \varepsilon$	$5 + 4\varepsilon$	$2 + \varepsilon$	$-1 - 5\varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$2 + \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$
11	$5 + \varepsilon$	$5 + \varepsilon$	$2 + 4\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$2 + 4\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$
12	$1 + 5\varepsilon$	$1 + 5\varepsilon$	$4 + 2\varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$4 + 2\varepsilon$	$-2 - \varepsilon$	$-2 - \varepsilon$
13	$4 + 5\varepsilon$	$4 + 2\varepsilon$	$4 + 2\varepsilon$	$-2 - 4\varepsilon$	$-2 - 4\varepsilon$	$1 + 2\varepsilon$	$1 - \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	$-2 - \varepsilon$
14	$5 + 4\varepsilon$	$2 + 4\varepsilon$	$2 + 4\varepsilon$	$-4 - 2\varepsilon$	$-4 - 2\varepsilon$	$2 + \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$-1 + \varepsilon$	$-1 - 2\varepsilon$
15	3	3	3	3	3	$-3 - 3\varepsilon$	3ε	3ε	$-3 - 3\varepsilon$
16	$3 + 3\varepsilon$	$3 + 3\varepsilon$	$3 + 3\varepsilon$	-3ε	-3ε	$3 + 3\varepsilon$	-3ε	-3ε	-3

Zur Äquivalenzklassenbestimmung auf der Menge der q-wertigen Funktionen F von n Variablen wird aus den vorangestellten Betrachtungen der folgende Algorithmus gewonnen.

gegeben: F — Menge der q-wertigen Funktionen von n Variablen

↓

bei kleinen n: systematische Generation der Elemente von F,
$f \in F, f\colon X \to Y$, beliebig
bei großen n empfiehlt sich die Verwendung eines Zufallsgenerators
(Monte-Carlo-Verfahren)

↓

Berechnung des komplexen Rademacher-Walsh-Spektrums $\tilde{\boldsymbol{R}}$ von $\tilde{f}(\varphi(f) = \tilde{f})$

↓

Vertauschung von Spektralkoeffizienten aus $\tilde{\boldsymbol{R}}$ und/oder Multiplikation
mit ε^i, $i \in \mathbb{Z}_q$

↓ ↓ ↓

1 2 p

Äquivalenzklassen von Spektren q-wertiger Funktionen, die sich mit Hilfe
von Spektralbereich-Operationen ineinander umformen lassen. Auswahl
eines kanonischen Spektrums mit $|\tilde{R}_0| \geqq |\tilde{R}_1| \geqq \ldots \geqq |\tilde{R}_n| \geqq 0$ und
$\arg \varepsilon \geqq \arg \tilde{R^i} \geqq 0$, $i = 0, \ldots, n$, für jede Äquivalenzklasse

Der vorgestellte Algorithmus wurde zur Bestimmung der Äquivalenzklassen der ternären Funktionen von zwei Variablen angewendet. Dabei ergaben sich 16 solche Klassen für die insgesamt 19683 Funktionen. Die gewonnenen kanonischen Spektren, als Repräsentanten ihrer Äquivalenzklassen, sind in Tab. 1 angegeben. Durch Vollführung der beschriebenen Äquivalenzoperationen lassen sich alle Spektren der genannten Funktionenmenge auf ein in der Tabelle vertretenes kanonisches Spektrum übertragen. Somit ist die Erkennung der Äquivalenzklassenzugehörigkeit aller dreiwertigen Funktionen von zwei Variablen gesichert.

6. Schlußbemerkungen

Das vorgestellte Verfahren kann zur Äquivalenzklassenbestimmung beliebiger mehrwertiger Funktionen verwendet werden. Die Anzahl der Äquivalenzklassen für die drei- und höherwertigen Funktionen ist naturgemäß, im Vergleich zu den zweiwertigen, erheblich größer, und ihre Bestimmung erfordert einen höheren Rechenaufwand. Die Repräsentation von Äquivalenzklassen durch kanonische Spektren, die tabellarisch aufgestellt sind, hat eine besondere praktische Bedeutung beim Logikentwurf digitaler Systeme. Funktionen, die zur selben Äquivalenzklasse gehören, besitzen ähnliche Realisierungen. Es ist deshalb sinnvoll, derartige Tabellierungen mit der notwendigen Information über die Realisierung der kanonischen Funktion durch ein ausgewähltes Bausteinsystem (z.B. Antivalenz- und Schwellwertelementen) zu versehen. Daraus können sofort die Realisierungen aller zur selben Äquivalenzklasse gehörenden Funktionen, mit Berücksichtigung der vollzogenen Veränderungen bei der Bestimmung ihrer Äquivalenzklassenzugehörigkeit, erhalten werden.

Schrifttum

[1] *Lloris, A.*, und *J. Velasko:* Classification under permutations of the ternary functions of two variables, IEE Proc. **128-E** (1981) 143—148.

[2] *Ninomiya, I.:* A theory of the coordinate representation of switching functions, Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ. **10** (1958) 175—190.

[3] *Todorow, J.*, und *O. Janicke:* Darstellung mehrwertiger Funktionen durch Reihenentwicklung nach orthogonalen Funktionensystemen über endlichen Körpern. Z. elektr. Inform.- u. Energietechnik, IET (1982) (im Druck).

[4] *Todorow, J.:* Zur Realisierung mehrwertiger Funktionen mit Schwellwertelementen. Elektronische Inf.-Verarbeitung und Kybernetik, EIK (1982) (im Druck).