Z. elektr. Inform.- u. Energietechnik, Leipzig **13** (1983) 1, S. 69—80

Mitteilung aus der Sektion Informationstechnik der Technischen Universität Dresden

Darstellung mehrwertiger Funktionen durch Reihenentwicklung nach orthogonalen Funktionensystemen über endlichen Körpern

Von *J. Todorow* und *O. Janicke*[1]

Mit 3 Abbildungen (Eingegangen am 12. Dezember 1981)

1. Einleitung

Aus der Notwendigkeit der analytischen Beschreibung mehrwertiger Logikfunktionen erwächst das Bestreben, geeignete Transformationsmethoden, wie die diskrete Walsh-Transformation für zweiwertige Logikfunktionen, auch für den Fall der mehrwertigen Logik zu finden. Es ist daher naheliegend, die bekannte Definition der diskreten Walsh-Funktionen, die für eine zweielementige Wertemenge gültig ist, auf eine dem mehrwertigen Fall entsprechenden zu erweitern. Dieser Zielstellung folgeleistend werden in den Abschnitten 3. und 4. dieses Artikels reelle und komplexe mehrwertige Walsh-Funktionen auf einem endlichen Galois-Feld bzw. auf einem endlichen komplexen Körper eingeführt. Sie stellen ein orthogonales Funktionensystem für die auf diesen Körpern definierten mehrwertigen Funktionen dar. Die bekannte Definition der zweiwertigen Walsh-Funktionen sowie die entsprechenden Transformations- und Rücktransformationsgleichungen der diskreten Walsh-Transformation sind Sonderfälle der hier angegebenen Beziehungen.

2. Gruppentheoretische Grundlagen

Es sei die endliche Menge der positiven ganzen Zahlen modulo einer Primzahl q gegeben, $\mathbb{Z}_q = \{0,1, \ldots, q-1\}$. Diese bildet mit der zweistelligen Verknüpfung $\oplus^q$, Addition modulo q, eine abelsche Gruppe [2, 11]. Die Menge $\mathbb{E}_q = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{q-1}\}$ der q Einheitswurzeln $\varepsilon = \exp(2\pi \mathrm{j}/q)$, j ist die imaginäre Einheit, und die Multiplikation komplexer Zahlen $\bigcirc$ bilden ebenfalls eine abelsche Gruppe. Das Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{Z}_q, \oplus^q, \cdot^q)$, $\cdot^q$ bezeichnet die Multiplikation modulo q, ist ein endlicher Körper, d.h. ein Galois-Feld $GF(q)$ [2, 11]. Das Tripel $(\mathbb{E}_q, \dot{+}, \bigcirc)$ definiert ebenfalls einen endlichen Körper, der ein Unterkörper des komplexen Körpers $\mathbb{C}$ ist. Die zweistellige Operation $\dot{+}$ (Addition) ist auf $\mathbb{E}_q$ wie folgt definiert:

$$\varepsilon^i \dot{+} \varepsilon^k = \varepsilon^{(i \cdot q k)}, \tag{1}$$

für alle i, k aus $\mathbb{Z}_q$, bzw. ε^i, ε^k aus $\mathbb{E}_q$.

Es sei eine nichtleere endliche Menge $T = \{0, 1, \ldots, q^n - 1\}$ von diskreten Zeitpunkten gegeben. Das n-fache kartesische Produkt der Menge $\mathbb{Z}_q$ mit sich selbst, $\mathbb{Z}_q^n = \mathbb{Z}_q \times \ldots \times \mathbb{Z}_q$, ist die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)(t) \in \mathbb{Z}_q^n$ mit $x_i(t) \in \mathbb{Z}_q$, $t \in T$.

[1] Dipl.-Ing. *Juri Todorow* und Dr. sc. techn. *Ortrud Janicke*, Sektion Informationstechnik, Bereich Bauelemente und Systeme, Technische Universität Dresden, DDR-8027 Dresden, Mommsenstraße 13.

Eine q-wertige Funktion f auf $GF(q)$ ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{Z}_q$. Ihre Funktionswerte $f(x_1, \ldots, x_n)$ für alle diskreten Zeitpunkte $t \in T$ sind durch eine Wahrheitstabelle eindeutig bestimmt.

$$\begin{array}{c|c}
x_1 & \ldots x_1(t) \ldots \\
\vdots & \vdots \\
x_n & \ldots x_n(t) \ldots \\
\hline
f(x_1, \ldots, x_n) & \ldots f(x_1, \ldots, x_n)(t) \ldots
\end{array}$$

Eine nichtleere endliche Menge $T_{\mathrm{C}} = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{q^n-1}\}$ von diskreten komplexen Zeitpunkten sei gegeben. Das n-fache kartesische Produkt $\mathbb{E}_q^n = \mathbb{E}_q \times \ldots \times \mathbb{E}_q$ ist die Menge der geordneten n-Tupel $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)(t_{\mathrm{C}}) \in \mathbb{E}_q^n$ mit $\tilde{x}_i(t_{\mathrm{C}}) \in \mathbb{E}_q$, $t_{\mathrm{C}} \in T_{\mathrm{C}}$. Analog erklärt die Abbildung $\tilde{f}\colon \mathbb{E}_q^n \to \mathbb{E}_q$ eine komplexe q-wertige Funktion, die ebenfalls durch eine Wahrheitstabelle der Funktionswerte $\tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ für alle $t_{\mathrm{C}} \in T_{\mathrm{C}}$ angegeben werden kann.

Es werden weiterhin ausschließlich Zeitfunktionen betrachtet. Solange die Eindeutigkeit der Aussagen gesichert ist, wird ihre Zeitabhängigkeit nicht explizit hervorgehoben.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_q^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi^n"'] & \mathbb{Z}_q \arrow[d, "\Phi"] \\
\mathbb{E}_q^n \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{E}_q
\end{tikzcd}$$

Abb. 1. Kommutatives Diagramm I

Die durch $\Phi\colon x_i \mapsto \tilde{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$ definierte Zuordnung ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}_q$ in $\mathbb{E}_q$. Das Diagramm in Abb. 1 ist kommutativ, denn es gilt:

$$\Phi[f(x_1, \ldots, x_n)] = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n), \tag{2}$$

$$\Phi^n[(x_1, \ldots, x_n)] = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \tag{3}$$

und ebenso

$$\Phi(x_1 \oplus^q x_2) = \tilde{x}_1 \circ \tilde{x}_2, \tag{4}$$

$$\Phi(x_1 \cdot^q x_2) = \tilde{x}_1 \dotplus \tilde{x}_2 \tag{5}$$

für alle diskreten Zeitpunkte aus T bzw. T_{C}, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_q$, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \mathbb{E}_q$.

3. Der lineare Raum der q-wertigen Funktionen aus GF(q) und $\mathbf{E}_q$

F bezeichne die Menge der q-wertigen Funktionen auf dem Galois-Feld $GF(q)$ und $\tilde{F}$ die Menge der komplexen q-wertigen Funktionen auf $\mathbb{E}_q \subseteq \mathbb{C}$. Die Mächtigkeit von F bzw. $\tilde{F}$ beträgt q^n. Sowohl F als auch $\tilde{\mathrm{F}}$ stellen endliche Funktionenräume dar, die weiterhin mit $\boldsymbol{F}$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{F}}$ bezeichnet werden. $\boldsymbol{F}$ ist ein Unterraum des reellen Funktionenraumes und $\tilde{\boldsymbol{F}}$ des Hilbertschen Funktionenraumes.

a) der Funktionenraum $\boldsymbol{F}$

Im Funktionenraum $\boldsymbol{F}$ wird ein Skalarprodukt wie folgt definiert:

$$f \oplus g = \sum_{x \in \mathbb{Z}_q^n} f(x) \oplus^q g(x). \tag{6}$$

Die q-wertigen Funktionen f, $g \in \boldsymbol{F}$ besitzen die Darstellung $\boldsymbol{f}$ bzw. $\boldsymbol{g}$ als q^n-dimensionale Vektoren. Durch die Gleichung

$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{\boldsymbol{f} \oplus \boldsymbol{f}} \tag{7}$$

wird in $\boldsymbol{F}$ eine Norm eingeführt. Die Metrik des Raumes ist

$$\varrho(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \|(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})_{\mathrm{mod}\,q}\|. \tag{8}$$

Es gibt eine Menge linear unabhängiger Funktionen in $\boldsymbol{F}$, $\Theta = \{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{q^n-1}\}$, so daß die Darstellung

$$f = \frac{1}{q^n} \sum_{i=0}^{q^n-1} K(i)\overline{\vartheta}_i + f(0), \quad K(i) \in \mathbb{R}, \quad \vartheta_i \in \Theta \tag{9}$$

möglich ist.

b) der Funktionenraum $\tilde{\boldsymbol{F}}$

Das Skalarprodukt in $\tilde{\boldsymbol{F}}$ ist wie folgt definiert:

$$\tilde{\boldsymbol{f}} \odot \tilde{\boldsymbol{g}} = \sum_{\tilde{x} \in \mathrm{E}_q^n} \tilde{f}(\tilde{x}) \circ \tilde{g}(\tilde{x}). \tag{10}$$

Dabei sind $\tilde{\boldsymbol{f}}$ und $\tilde{\boldsymbol{g}}$ die Vektordarstellungen der entsprechenden komplexen q-wertigen Funktionen. Man berechnet die Norm des Raumes $\tilde{\boldsymbol{F}}$ nach der Gleichung

$$\|\tilde{\boldsymbol{f}}\| = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{f}} \odot \tilde{\boldsymbol{f}}} \tag{11}$$

und dessen Metrik ist

$$\varrho(\tilde{\boldsymbol{f}}, \tilde{\boldsymbol{g}}) = \|\tilde{\boldsymbol{f}} - \tilde{\boldsymbol{g}}\|. \tag{12}$$

Es ist naheliegend, die Menge $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\vartheta}_0, \ldots, \tilde{\vartheta}_{q^n-1}\}$ als eine Menge linear unabhängiger Funktionen auf $\tilde{\boldsymbol{F}}$ einzuführen, die eine Darstellung der Funktion $\tilde{f}$ in folgender Form gestatten:

$$\tilde{f} = \frac{1}{q^n} \sum_{i=0}^{q^n-1} S(i)(\tilde{\vartheta}_i)^*, \quad S(i) \in \mathbb{C}, \quad \tilde{\vartheta}_i \in \tilde{\Theta}, \tag{13}$$

*: konjugiert komplex.

Die Räume $\boldsymbol{F}$ und $\tilde{\boldsymbol{F}}$ sind zueinander isomorph. Diese Isomorphie ist durch den Gruppenisomorphismus $\Phi\colon \mathbb{Z}_q \to \mathrm{E}_q$ (Gl. 2 bis 5, Abb. 1) begründet.

c) Anmerkung

Die Multiplikation von Matrizen in den Funktionenräumen $\boldsymbol{F}$ und $\tilde{\boldsymbol{F}}$ ist als eine gewöhnliche Matrizenmultiplikation zu verstehen, jedoch mit der im entsprechenden Funktionenraum definierten Produktbildung. Um an diese Tatsache zu erinnern, werden weiterhin Matrizenprodukte mit den in Gl. 6 und 10 eingeführten Symbolen bezeichnet. Die komponentenweise Multiplikation von Zeilen- und Spaltenelementen der Matrizen ist dabei ein Skalarprodukt des Raumes $\boldsymbol{F}$ oder $\tilde{\boldsymbol{F}}$ der entsprechenden Zeilen- und Spaltenvektoren dieser Matrizen.

4. Definition der q-wertigen *Walsh*-Funktionen auf $GF(p)$

$\Omega = \{0, 1, \ldots, q^n - 1\} \subseteq GF(q^n)$, n ist eine beliebige natürliche Zahl, ist eine nichtleere endliche Menge. Die Elemente von Ω werden Sequenzen ($\omega \in \Omega$) genannt [6, 7]. $T = \{0, 1, \ldots, q^n - 1\} \subseteq GF(q)$ sei die ebenfalls nichtleere und endliche Menge von diskreten Zeitpunkten $t \in T$.

Definition 1: Eine q-wertige Walsh-Funktion im Galois-Feld $GF(q)$ ist eine Abbildung

$$w_q^n : \Omega \times T \to \mathbb{Z}_q, \tag{14}$$

deren Funktionswerte $w_q^n(\omega, t)$ wie folgt bestimmt werden:

$$w_q^n(\omega, t) = \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{t} = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_i \cdot^q t_i). \tag{15}$$

Dabei sind

$$\boldsymbol{t} = (t_{n-1}, \ldots, t_0), \quad t = \sum_{i=0}^{n-1} t_i q^i, \quad t_i \in \mathbb{Z}_q, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{n-1}, \ldots, \omega_0), \quad \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i q^i, \quad \omega_i \in \mathbb{Z}_q. \tag{17}$$

Die $(q^n \times q^n)$-Matrix $\boldsymbol{W}_q^n$ (Matrix der q-wertigen Walsh-Funktionen auf $GF(q)$) besteht aus den Funktionswerten $w_q^n(\omega, t)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in T$. Die Zeilen von $\boldsymbol{W}_q^n$ sind nach steigenden Sequenzwerten geordnet.

Beispiel 1:

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{\omega} \diagdown \boldsymbol{t} & \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \end{array}$$

$$\boldsymbol{W}_3^2 = \begin{array}{c} 0\ 0 \\ 0\ 1 \\ 0\ 2 \\ 1\ 0 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2 \\ 2\ 0 \\ 2\ 1 \\ 2\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

In Abb. 2 sind die Zeilen von $\boldsymbol{W}_3^2$ als diskrete Zeitfunktionen graphisch dargestellt.

Jede Zeile von $\boldsymbol{W}_q^n$ bestimmt eindeutig eine q-wertige Funktion aus dem Funktionenraum $\boldsymbol{F}$. Die Gesamtheit dieser Funktionen entspricht der Menge $\Theta = \{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{q^n-1}\}$. Sie kann nun genauer beschrieben werden. Es gilt nach Definition 1 immer $\vartheta_0 = 0$. Es existieren genau n Funktionen aus Θ, für die gilt $\vartheta_i(t) = x_i(t)$, $x_i(t) \in \mathbb{Z}_q$, $\vartheta_i \in \Theta$, $t \in T$. Die übrigen $q^n - (n+1)$ Funktionen aus Θ stellen modulo q Summen von x_i mit sich selbst und mit verschiedenen x_i und deren modulo q Summen für alle $t \in T$ dar.

Beispiel 2: Für den Fall $q = 3$, $n = 2$ besteht die Menge Θ aus folgenden Funktionen: $\Theta = \{\vartheta^0, x_1, x_1 \oplus^3 x_1, x_2, x_1 \oplus^3 x_2, x_1 \oplus^3 x_1 \oplus^3 x_2, x_2 \oplus^3 x_2, x_1 \oplus^3 x_2 \oplus^3 x_2, x_1 \oplus^3 x_1 \oplus^3 x_2 \oplus^3 x_2\} = \{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_8\}$. Es gilt beispielsweise $\vartheta_2 = \vartheta_1 \oplus^3 \vartheta_1$, $\vartheta_6 = \vartheta_3 \oplus^3 \vartheta_3$, $\vartheta_8 = \vartheta_2 \oplus^3 \vartheta_6$.

Theorem 1: Die Funktionenmenge $\Theta = \{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_{q^n-1}\}$ bildet ein orthogonales Funktionensystem auf $\boldsymbol{F}$.

Θ ist genau dann orthogonal, wenn die Matrix $\boldsymbol{W}_q^n$ einer Orthogonalitätsbeziehung genügt. Es sei $z \in \mathbb{Z}_q$ und $\tilde{z} = (q - z)_{\mathrm{mod}\, q}$. Dann gilt

$$\boldsymbol{W}_q^n \oplus \overline{\boldsymbol{W}}_q^n = [1 + 2 + \ldots + (q-1)] q^{n-1} \hat{\boldsymbol{E}}, \tag{19}$$

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \begin{bmatrix} 1 \diagdown 0 & 0 \diagdown 1 \\ & 0 \end{bmatrix}, \text{ für alle } q, n \in \mathrm{N}, q \text{ Primzahl.}$$

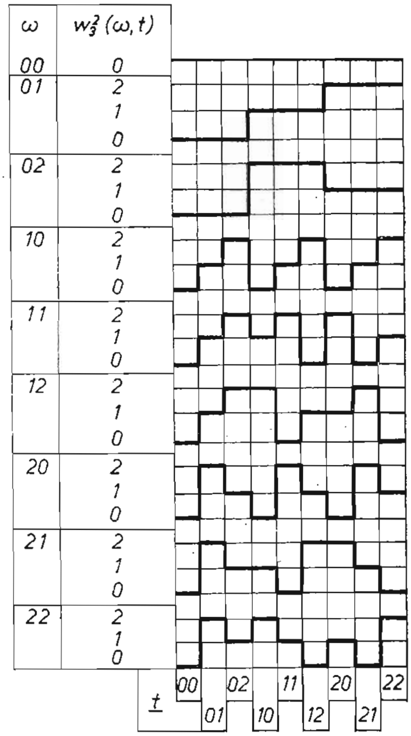

Abb. 2. Graphische Darstellung von $w_3^2(\omega, t)$

Die Gleichung

$$\boldsymbol{q}^n - b(\boldsymbol{W}_q^n \oplus \overline{\boldsymbol{W}}_q^n) = q^n \boldsymbol{E}, \quad b = \frac{q}{1+2\ldots+(q-1)}, \tag{20}$$

$\boldsymbol{q}^n$ ist eine quadratische $(q^n \times q^n)$-Matrix, deren Elemente sämtlich gleich q^n sind, $\boldsymbol{E}$ — Einheitsmatrix, ist eine Orthogonalitätsbeziehung für $\boldsymbol{W}_q^n$. Θ ist ein orthogonales Funktionensystem auf $\boldsymbol{F}$, denn

$$q^n - b(\vartheta_i \oplus \vartheta_k) = \begin{cases} q^n & \text{für} \quad i = k \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k \end{cases}. \tag{21}$$

4.1. Eigenschaften von $w_q^n(\omega, t)$

Die Eigenschaften der q-wertigen Walsh-Funktionen auf $GF(q)$ werden in den folgenden Gleichungen angegeben:

1. $$\forall t \in T(w_q^n(0, t) = 0) \tag{22}$$

2. $$q^n - b \sum_{t \in T} (w_q^n(\omega, t) \oplus^q w_q^n(\omega', t)) = \begin{cases} q^n & \text{für} \quad \omega = \omega' \\ 0 & \text{für} \quad \omega \neq \omega' \end{cases} \tag{23}$$

3. $$w_q^n(\omega, t) = w_q^n(t, \omega) \tag{24}$$

4. $$w_q^n(\boldsymbol{\omega} \oplus^q \boldsymbol{\omega}', t) = w_q^n(\omega, t) \oplus^q w_q^n(\omega', t), \tag{25}$$

   analog für $w_q^n(\omega, \boldsymbol{t} \oplus^q \boldsymbol{t}')$, unter $\boldsymbol{\omega} \oplus^q \boldsymbol{\omega}'$ bzw. $\boldsymbol{t} \oplus^q \boldsymbol{t}'$ verstehe man hier die komponentenweise modulo q Addition der Vektoren $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}'$ (s. Gl. 16, 17).

5. I.a. kann keine zu $\boldsymbol{W}_q^n$ inverse Matrix berechnet werden.

Die Menge der q-wertigen Walsh-Funktionen $WF = \{w_q^n(\omega, t) \mid w_q^n : \Omega \times T \to \mathbb{Z}_q\}$ bildet mit der Addition modulo q eine additive abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $w_q^n(0, t)$:

$$\forall \omega \in \Omega\ (w_q^n(\omega, t) \oplus^q w_q^n(0, t) = w_q^n(\omega, t)). \tag{26}$$

Das zu $w_q^n(\omega, t)$ inverse Element ist $\overline{w}_q^n(\omega, t)$. Die Addition modulo q ist kommunativ und assoziativ und liefert wiederum eine Walsh-Funktion:

$$\begin{aligned} &w_q^n(\omega, t) \oplus^q w_q^n(\omega', t) = w_q^n(\omega', t) \oplus^q w_q^n(\omega, t) \\ &= w_q^n(\omega'', t); \quad \omega, \omega', \omega'' \in \Omega. \end{aligned} \tag{27}$$

4.2. Darstellung q-wertiger Funktionen auf GF(q)

Zur Berechnung der reellen Koeffizienten $K(i)$, $i = 0, \ldots, q^n - 1$, aus Gleichung 7 wird das orthogonalisierte System q-wertiger Walsh-Funktionen als linear unabhängige Basis des Funktionenraumes $\boldsymbol{F}$ verwendet. Es sei f eine Funktion dieses Raumes, die als ein Zeilenvektor $\boldsymbol{f}$ gegeben ist. Es gilt in der Matrixschreibweise:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{q}^n - b(\boldsymbol{f} \oplus \boldsymbol{W}_q^n). \tag{28}$$

Hier ist $\boldsymbol{q}^n$ ein q^n-dimensionaler Zeilenvektor dessen Elemente alle gleich q^n sind.

Der reelle Koeffizientenvektor $\boldsymbol{K}$ liefert nicht für alle prime $q \in \mathrm{N}$ eine richtige Darstellung der Form Gl. 7. Die Ursache dafür ist das Nichtvorhandensein der inversen Matrix zu $\boldsymbol{W}_q^n$ für alle q. Die mittlere quadratische Abweichung

$$Q = \sum_{t=0}^{q^n-1} \left[f(t) - \frac{1}{q^n} \sum_{\omega=0}^{q^n-1} K(\omega)\, \overline{w}_q^n(\omega, t) - f(0) \right]^2 \tag{29}$$

ist ein Ausdruck dafür wie gut f durch eine Reihenentwicklung approximiert werden kann. Für vollständige orthogonale Funktionensysteme ist immer $Q = 0$ [5]. Das orthogonale Funktionensystem θ ist vollständig nur für die Fälle $q = 2$ und $q = 3$, die folgenden Gleichungen sind nur dann richtig.

1. $q = 2$: $\quad \boldsymbol{K}_{(2)} = \boldsymbol{2}^n - 2(\boldsymbol{f}_{(2)} \oplus \boldsymbol{W}_2^n)$, (30)

$$\boldsymbol{f}_{(2)} = \frac{1}{2^n} \boldsymbol{K}_{(2)} \boldsymbol{W}_2^n + \boldsymbol{f}_{(2)}(0). \tag{31}$$

2. $q = 3$: $\quad \boldsymbol{K}_{(3)} = \boldsymbol{3}^n - (\boldsymbol{f}_{(3)} \oplus \boldsymbol{W}_3^n)$, (32)

$$\boldsymbol{f}_{(3)} = \frac{1}{3^n} \boldsymbol{K}_{(3)}\, \overline{\boldsymbol{W}}_3^n + \boldsymbol{f}_{(3)}(0). \tag{33}$$

Die Definitionsgleichung der q-wertigen Walsch-Funktionen (Gl. 15) liefert für den Sonderfall $q = 2$ die in der Literatur beschriebenen modifizierten 01-Walsh-Funktionen [7] und das Gleichungspaar (28) und (9) die bekannten Transformations- (30) und Rücktransformationsgleichungen (31) der diskreten Walsh-Transformation.

Das folgende Beispiel zeigt die Reihenentwicklung einer dreiwertigen Funktion, die in ihrer Wertetabelle gegeben ist.

Beispiel 3:

x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$f(x_1, x_2)$	2	1	1	1	0	0	1	0	0

Gleichung 32 liefert den Koeffizientenvektor $\boldsymbol{K} = (3, -3, -3, -3, 0, 0, -3, 0, 0)$. Damit lautet die Reihenentwicklung von $f(x_1, x_2)$ nach Gl. 33:

$$f(x_1, x_2) = 2 - [x_1 + x_2 + (x_1 \oplus^3 x_1) + (x_2 \oplus^3 x_2)]/3. \tag{34}$$

5. Definition der komplexen q-wertigen *Walsh*-Funktionen

Es werden komplexe q-wertige Funktionen $\tilde{f}\colon \mathbb{E}_q^n \to \mathbb{E}_q$ betrachtet. Die in der Literatur behandelten Darstellungsmöglichkeiten solcher Funktionen als Reihenentwicklungen über einem orthogonalen Basissystem des Raumes $\boldsymbol{F}$ beziehen sich ausschließlich auf die Orthogonalitätseigenschaften der Charaktere abelscher Gruppen [3, 8]. Daraus ist auch die sogenannte Menger-Transformation begründet [4, 9]. In [1] wird aus dem Zusammenhang zwischen Gruppencharakteren und Haarschen Funktionen eine Haar-Transformation für komplexe q-wertige Funktionen definiert.

Eine verallgemeinerte Definition der Walsh-Funktionen, die den bekannten zweiwertigen Fall einschließt, bildet hier die Grundlage zur Einführung der komplexen q-wertigen Walsh-Funktionen als ein orthogonales Funktionensystem des komplexen Funktionenraumes $\tilde{\boldsymbol{F}}$.

Definition 2: Eine komplexe q-wertige Walsh-Funktion auf $\mathbb{E}_q \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Abbildung

$$\tilde{w}_q^n\colon \Omega_{\mathbb{C}} \times T_{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}_q \tag{35}$$

mit

$$\tilde{w}_q^n(\omega_{\mathbb{C}}, t_{\mathbb{C}}) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \boldsymbol{t}_{\mathbb{C}} = \prod_{i=0}^{n-1} (\omega_{\mathbb{C}_i} \dotplus t_{\mathbb{C}_i}). \tag{36}$$

$T_{\mathbb{C}} = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{q^n-1}\}$ Menge von diskreten komplexen Zeitpunkten $t_{\mathbb{C}} \in T_{\mathbb{C}}$,

$\Omega_{\mathbb{C}} = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{q^n-1}\}$ komplexe Sequenzmenge, $\omega_{\mathbb{C}} \in \Omega_{\mathbb{C}}$.

Für $\omega_{\mathbb{C}}$ und $t_{\mathbb{C}}$ gilt die Darstellung:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{C}} = (\omega_{\mathbb{C}_{n-1}}, \ldots, \omega_{\mathbb{C}_0}); \quad \omega_{\mathbb{C}} = \prod_{i=0}^{n-1} (\omega_{\mathbb{C}_i})^{q^i}, \quad \omega_{\mathbb{C}_i} \in \mathbb{E}_q, \tag{37}$$

$$\boldsymbol{t}_{\mathbb{C}} = (t_{\mathbb{C}_{n-1}}, \ldots, t_{\mathbb{C}_0}); \quad t_{\mathbb{C}} = \prod_{i=0}^{n-1} (t_{\mathbb{C}_i})^{q^i}, \quad t_{\mathbb{C}_i} \in \mathbb{E}_q, \tag{38}$$

$$\varepsilon = \exp(2\pi \mathrm{j}/q), \quad \mathrm{j} = \sqrt{-1}.$$

Die Matrix der komplexen q-wertigen Walsh-Funktionen $\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n$ besitzt $q^n \times q^n$ Elemente: $\tilde{w}_q^n(\omega_{\mathbb{C}}, t_{\mathbb{C}})$ für alle $\omega_{\mathbb{C}} \in \Omega_{\mathbb{C}}$ als Zeilen- und alle $t_{\mathbb{C}} \in T_{\mathbb{C}}$ als Spaltennummer.

Die Funktionen w_q^n und $\tilde{w}_q^n$ sind zueinander isomorph, das Diagramm in Abb. 3 ist kommutativ mit der in Abschnitt 1 eingeführten Isomorphieabbildung Φ. Es gilt hier $\Phi(w_q^n(\omega, t)) = \tilde{w}_q^n(\omega_{\mathbb{C}}, t_{\mathbb{C}})$.

Die in Beispiel 1 angegebene Matrix $\boldsymbol{W}_3^n$ geht in die Matrix $\tilde{\boldsymbol{W}}_3^2$ nach Ersetzen der Wertemenge $\{0, 1, 2\}$ durch $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ über.

Jede Zeile von $\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n$ definiert eine komplexe q-wertige Funktion aus dem Raum $\tilde{\boldsymbol{F}}$. Die Gesamtheit dieser Funktionen bildet die Menge $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\vartheta}_0, \ldots, \tilde{\vartheta}_{q^n-1}\}$. Sie besteht aus den Funktionen $\tilde{\vartheta}_0 = 1$, den insgesamt n Funktionen $\tilde{\vartheta}_i(t_{\mathbb{C}}) = \tilde{x}_i(t_{\mathbb{C}})$, $\tilde{x}_i(t_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{E}_q$, $\tilde{\vartheta}_i \in \tilde{\Theta}$, $t_{\mathbb{C}} \in T_{\mathbb{C}}$ und allen möglichen Produkten von $\tilde{x}_i$ mit sich selbst und verschiedener $\tilde{x}_i$ untereinander für alle $t_{\mathbb{C}} \in T_{\mathbb{C}}$. Die Funktionenmenge $\tilde{\Theta}$ aus Beispiel 2 geht in Θ über, wenn man x_i mit $\tilde{x}_i$ ersetzt und anstelle der zweistelligen Operation $\oplus^3$ die komplexe Multiplikation $\bigcirc$ einführt.

Theorem 2: Die Funktionenmenge $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\vartheta}_0, \ldots, \tilde{\vartheta}_{q^n-1}\}$ bestimmt ein vollständiges orthoganales Funktionensystem des komplexen Funktionenraumes $\tilde{\boldsymbol{F}}$.

Es sei $(\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n)^*$ die zu $\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n$ konjugiert komplexe Matrix. Die Orthogonalitätsbeziehung

$$\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n \odot (\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n)^* = q^n \boldsymbol{E} \tag{39}$$

ist für alle q, $n \in \mathrm{N}$, q Primzahl, erfüllt. Damit gilt

$$\boldsymbol{\vartheta}_i \odot \boldsymbol{v}_k^* = \begin{cases} q^n & \text{für} \quad i = k \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k \end{cases} \tag{40}$$

und $\tilde{\Theta}$ ist ein orthogonales Funktionensystem auf $\tilde{\boldsymbol{F}}$.

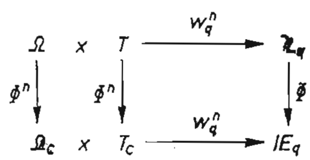

Abb. 3. Kommutatives Diagramm II. (w_q^n muß richtig heißen $\tilde{w}_q^n$).

5.1. *Eigenschaften von* $\tilde{w}_q^n(\omega_C, t_C)$

Die komplexen q-wertigen Walsh-Funktionen besitzen folgende grundlegende Eigenschaften:

1. $$\tilde{w}_q^n(\omega_C, t_C) = u(\omega_C, t_C) + \mathrm{j}v(\omega_C, t_C) \tag{41}$$
mit
$$u(\omega_C, t_C) = \mathrm{Re}\,\{\tilde{w}_q^n(\omega_C, t)_C\} \tag{42}$$
$$v(\omega_C, t_C) = \mathrm{Im}\,\{\tilde{w}_q^n(\omega_C, t_C)\} \tag{43}$$
$$\forall t_C \in T_C \left[\sum_{\omega_C \in \Omega_C} u(\omega_C, t_C) = \sum_{\omega_C \in \Omega_C} v(\omega_C, t_C) = 0\right] \tag{44}$$
analog für ω_C

2. $$\forall t_C \in T_C(\tilde{w}_q^n(1, t_C) = 1) \tag{45}$$

3. $$\sum_{t_C \in T_C} \tilde{w}_q^n(\omega_C, t_C) \bigcirc [\tilde{w}_q^n(\omega_C', t_C)]^* = \begin{cases} q^n & \text{für} \quad \omega_C = \omega_C' \\ 0 & \text{für} \quad \omega_C \neq \omega_C' \end{cases} \tag{46}$$

4. $$\tilde{w}_q^n(\omega_C, t_C) = \tilde{w}_q^n(t_C, \omega_C) \tag{47}$$

5. $$\tilde{w}_q^n(\boldsymbol{\omega}_C \bigcirc \boldsymbol{\omega}_C', t) = \tilde{w}_q^n(\omega_C, t_C) \bigcirc \tilde{w}_q^n(\omega_C', t_C) \tag{48}$$
analog für $\tilde{w}_q^n(\omega_C, \boldsymbol{t}_C \bigcirc \boldsymbol{t}_C')$,

$\boldsymbol{\omega}_C \bigcirc \boldsymbol{\omega}_C'$ bzw. $\boldsymbol{t}_C \bigcirc \boldsymbol{t}_C'$ bedeuten die komponentenweise Multiplikation der entsprechenden Vektoren

6. $$(\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n)^{-1} = \frac{1}{q^n} (\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n)^*. \tag{49}$$

Die Menge der komplexen q-wertigen Walsh-Funktionen $\widetilde{WF} = \{\tilde{w}_q^n(\omega_\mathbb{C}, t_\mathbb{C}) \mid \tilde{w}_q^n: \Omega_\mathbb{C} \times T_\mathbb{C} \to \mathbb{E}_q\}$ und die Multiplikation komplexer Zahlen bilden eine multiplikative abelsche Gruppe. Ihr neutrales Element ist $\tilde{w}_q^n(1, t_\mathbb{C}) = 1$:

$$\forall \omega_\mathbb{C} \in \Omega_\mathbb{C}\ [\tilde{w}_q^n(1, t_\mathbb{C}) \bigcirc \tilde{w}_q^n(\omega_\mathbb{C}, t_\mathbb{C}) = \tilde{w}_q^n(\omega_\mathbb{C}, t_\mathbb{C})], \tag{50}$$

und das zu $\tilde{w}_q^n(\omega_\mathbb{C}, t_\mathbb{C})$ inverse Element ist $(\tilde{w}_q^n(\omega_\mathbb{C}, t_\mathbb{C}))^*$. Die Operation $\bigcirc$ ist auf $\widetilde{WF}$ abgeschlossen, assoziativ und kommutativ.

5.2. *Darstellung komplexer q-wertiger Funktionen auf* $\mathbb{E}_q$

Es ist jetzt die Berechnung des komplexen Koeffizientenvektors $\boldsymbol{S}$ aus Gl. 11 möglich:

$$\boldsymbol{S} = \tilde{\boldsymbol{f}} \odot \tilde{\boldsymbol{W}}_q^n, \tag{51}$$

$\tilde{\boldsymbol{f}}$ ist die Zeilen-Vektordarstellung der komplexen q-wertigen Funktion $\tilde{f} \in \tilde{\boldsymbol{F}}$. Da Θ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem auf $\tilde{\boldsymbol{F}}$ ist und die inverse Matrix $(\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n)^{-1}$ immer angegeben werden kann, ist die Identität

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{q^n} \boldsymbol{S} \odot (\tilde{\boldsymbol{W}}_q^n)^* \tag{52}$$

eindeutig für alle $q, n \in \mathrm{N}$, q Primzahl.

Der Zusammenhang zwischen den reellen und komplexen Koeffizienten $\boldsymbol{K}$ bzw. $\boldsymbol{S}$ kann für die Sonderfälle $q = 2$ und $q = 3$ angegeben werden.

$$\text{a) } q = 2\text{: Es gilt } \boldsymbol{S}_{(2)} = \boldsymbol{K}_{(2)}, \tag{53}$$

$\boldsymbol{S}_{(2)}$ ist reell, denn die Wertemenge $\mathbb{E}_2$ besteht nur aus den beiden reellen Einheitswurzeln $\varepsilon^0 = \mathrm{e}^0 = 1$ und $\varepsilon^1 = \mathrm{e}^{\pi j} = -1$.

$$\text{b) } q = 3\text{:} \quad \boldsymbol{K}_{(3)} = \operatorname{Re}\{\boldsymbol{S}_{(3)}\} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Im}\{\boldsymbol{S}_{(3)}\} \tag{54}$$

und

$$\boldsymbol{f}_{(3)} = \frac{1}{q^n}\left[\operatorname{Re}\{\boldsymbol{S}_{(3)}\}\overline{\boldsymbol{W}_q^n} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Im}\{\boldsymbol{S}_{(3)}\}\,\overline{\boldsymbol{W}_q^n}\right] + \boldsymbol{f}(0). \tag{55}$$

Beispiel 4: Gegeben ist die komplexe q-wertige Funktion $f(x_1, x_2)$:

x_1	1	1	1	ε	ε	ε	ε^2	ε^2	ε^2
x_2	1	ε	ε^2	1	ε	ε^2	1	ε	ε^2
$f(x_1, x_2)$	ε^2	ε	ε	ε	1	1	ε	1	1

Man berechnet den komplexen Koeffizientenvektor $\boldsymbol{S}$ nach Gl. (51):

$$\operatorname{Re}\{\boldsymbol{S}\} = (3/2, -3, -3, -3, 3/2, 3/2, -3, 3/2, 3/2)$$

und

$$\operatorname{Im}\{\boldsymbol{S}\} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, 0, 0, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

Die Reihenentwicklung von $\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ lautet:

$$\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{9}\left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j} - 3\,(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_2) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}\right)(\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2)\right]. \quad (56)$$

Der reelle Koeffizientenvektor $\boldsymbol{K} = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\} + 1/\sqrt{3}\,\mathrm{Im}\{\boldsymbol{S}\} = (3, -3, -3, -3, 0, 0, -3, 0, 0)$ stimmt mit dem in Beispiel 3 berechneten überein, die Reihenentwicklungen von $f(x_1, x_2)$ und $\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ sind ineinander umformbar.

6. Das Faltungstheorem für komplexe q-wertige Funktionen

Es seien $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ zwei beliebige Funktionen aus dem komplexen Funktionenraum $\tilde{\boldsymbol{F}}$.

Definition 3: Für $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{E}_q^n$ und $\tilde{f}, \tilde{g}\colon \mathrm{E}_q^n \to \mathrm{E}_q$ ist

$$[\tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}) *_{\mathrm{C}} \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})]_{\tilde{\boldsymbol{y}}} = \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{E}_q^n} \tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{x}} \,\dot{\bigcirc}\, \tilde{\boldsymbol{y}})\,\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \quad (57)$$

das Faltprodukt von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ an der Stelle $\tilde{\boldsymbol{y}}$.
Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der für den zweiwertigen Fall bekannten Beziehung [7, 10]. Es gilt das folgende Theorem.

Theorem (Faltungstheorem):

Für zwei beliebige komplexe q-wertige Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ gilt für alle $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{E}_q^n$:

$$S_{\tilde{g}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}})\,S_{\tilde{f}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}}) = \sum_{\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{E}_q^n} [\tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}) *_{\mathrm{C}} \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})]_{\tilde{\boldsymbol{y}}}\,\tilde{w}_q^n(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}}, \tilde{\boldsymbol{y}}). \quad (58)$$

Beweis: $$S_{\tilde{g}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}})\,S_{\tilde{f}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}}) = \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{E}_q^n}\left[\prod_{i=0}^{n-1}(\omega_{\mathrm{C}_i} \dotplus \tilde{x}_i)\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right] \cdot \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}}' \in \mathrm{E}_q^n}\left[\prod_{i=0}^{n-1}(\omega_{\mathrm{C}_i} \dotplus \tilde{x}'_i)\,\tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}')\right]$$

$$= \sum_{\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}' \in \mathrm{E}_q^n}\left[\prod_{i=0}^{n-1}[\omega_{\mathrm{C}_i} \dotplus (\tilde{x} \bigcirc \tilde{x}'_i)]\,\tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}')\,\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right]. \quad (59)$$

Mit der Substitution $\tilde{\boldsymbol{x}}' = \tilde{\boldsymbol{x}} \,\dot{\bigcirc}\, \tilde{\boldsymbol{y}}$ ergibt sich:

$$S_{\tilde{f}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}})\,S_{\tilde{g}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}}) = \sum_{\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{E}_q^n}\left[\prod_{i=0}^{n-1}(\omega_{\mathrm{C}_i} \dotplus \tilde{y}_i)\,\tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{x}} \bigcirc \tilde{\boldsymbol{y}})\,\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right]$$

und damit

$$= \sum_{\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{E}_q^n} [\tilde{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}) *_{\mathrm{C}} \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})]_{\tilde{\boldsymbol{y}}}\,\tilde{w}_q^n(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{C}}, \tilde{\boldsymbol{y}}), \quad (60)$$

was zu beweisen war.

Das hier angegebene Theorem ergibt für den Sonderfall $q = 2$ das bekannte Faltungstheorem für zweiwertige Funktionen [7, 10].

Beispiel 5: Gegeben sind die dreiwertigen Funktionen

$\boldsymbol{f} = (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2)$ und

$\boldsymbol{g} = (\varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 1, 1, \varepsilon, 1, 1)$.

Ihr Faltprodukt läßt sich wie folgt berechnen:

$\tilde{x}$		$\tilde{f}(\tilde{x})$	für $\tilde{g}(\tilde{x} \bigcirc \tilde{y})$ $\tilde{y} = (11)$	(1ε)	$(1\varepsilon^2)$	$(\varepsilon 1)$	$(\varepsilon\varepsilon)$	$(\varepsilon\varepsilon^2)$	$(\varepsilon^2 1)$	$(\varepsilon^2\varepsilon)$	$(\varepsilon^2\varepsilon^2)$
1	1	1	ε^2	ε	ε	ε	1	1	ε	1	1
1	ε	ε	ε	ε	ε^2	1	1	ε	1	1	ε
1	ε^2	ε^2	ε	ε^2	ε	1	ε	1	1	ε	1
ε	1	ε	ε	1	1	ε	1	1	ε^2	ε	ε
ε	ε	ε	1	1	ε	1	1	ε	ε	ε	ε^2
ε	ε^2	ε^2	1	ε	1	1	ε	1	ε	ε^2	ε
ε^2	1	ε^2	ε	1	1	ε^2	ε	ε	ε	1	1
ε^2	ε	ε^2	1	1	ε	ε	ε	ε^2	1	1	ε
ε^2	ε^2	ε^2	1	ε	1	ε	ε^2	ε	1	ε	1
$[\tilde{g}(\tilde{x}) *_{C} \tilde{f}(\tilde{x})]_{\tilde{y}}$											
Im			$\frac{5}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{5}{2}\sqrt{3}$
Re			$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	0	0	-1

Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch Bildung des komponentenweisen Produkts der komplexen Koeffizientenvektoren

$$S_f = \left(-3 - \sqrt{3}\,\mathrm{j},\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ -\sqrt{3}\,\mathrm{j},\right.$$

$$\left.\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ 3 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}\right) \text{ und } S_g = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ -3,\ -3,\right.$$

$$\left.-3,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ -3,\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j},\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}\right), \text{ der gegebenen}$$

Funktionen und anschließender Umformung gemäß Gl. 52.

7. Zusammenfassung

Die hier angegebene Methode zur Darstellung q-wertiger Funktionen beruht auf einer verallgemeinerten Definition der Walsh-Funktionen. Diese Methode wird vor allem ihre Anwendung in der Analyse von mehrwertigen Logikfunktionen finden. Man kann nun die erzielten Ergebnisse bei der Analyse von Schaltfunktionen [10] auf den mehrwertigen Fall übertragen. Besonders einfach gestaltet sich dabei das Erkennungsproblem mehrwertiger Schwellwertfunktionen anhand der bekannten Tabellierungsmöglichkeiten nunmehr auch für den Fall der mehrwertigen Logik.

Schrifttum

[1] *Ajzenberg, N. N., W. P. Rudko* i *E. W. Sysuew:* Funkzii i diskretnoe preobrazowanie Haara. Technitscheskaja kibernetika Nr. 6 (1975) 86–94.

[2] *Birkhoff, G.,* und *T. C. Bartee:* Angewandte Algebra. München/Wien: R. Oldenburg Verlag 1973.

[3] *Curtis, C. W.,* i *I. Reiner:* Teorija predstawlenij konetschnych grupp i assoziativnych algebr. Moskwa: „Nauka" 1969.

[4] *English, W. R.:* Synthesis of finite state algorithms in a Galois field GF(p^n). IEEE Trans. Comput. C-**30**, Nr. 3 (1981) 225—229.

[5] *Harmuth, H.:* Transmission of Information by Orthogonal Functions. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1969.

[6] *Harmuth, H.:* Teorija sekwentnogo analiza — osnowy i primenenija. Moskwa: "Mir", 1980.

[7] *Janicke, O.:* Walsh-Funktionen in der Systemtheorie. Dissertation B, Techn. Univ. Dresden, Dresden 1980.

[8] *Labunez, W. G.,* i *O. P. Sitnikow:* Garmonitscheskij analiz bulewych funkzij i funkzij k-znatschnoj ligiki nad konetschnymi poljami. Technitscheskaja kibernetika Nr. 1 (1975) 141—148.

[9] *Menger, K. S.:* A transform for logic networks. IEEE Trans. Comput. C-**18**, Nr. 3 (1969), 241—250.

[10] *Todorow, J.:* Die Analyse von Schaltfunktionen mit Hilfe der Rademacher-Walsh-Transformation und ihre Darstellung in der Schwellwertalgebra. Z. elektr. Inform.- u. Energietechnik (1981) Leipzig **12** (1982) 3, S. 261—277.

[11] *Wunsch, G.:* Systemtheorie. Leipzig: Akad. Verlagsges. Geest & Portig 1975.