

Mitteilung aus der Sektion Informationstechnik der Technischen Universität Dresden

Ein einfacher Weg der Repräsentation von Schwellwertfunktionen und der Synthese von Schwellwertelementen bei Anwendung der Rademacher-Walsh-Transformation

Von J. Todorow¹

Mit 1 Abbildung und 1 Tabelle

(Eingegangen am 13. Februar 1981)

Gliederung

1. Einleitung
2. Die Rademacher-Walsh-Transformation als Modifikation der diskreten Walsh-Transformation
3. Zur Berechnung der Spektralkoeffizienten
4. Schwellwertelemente und Schwellwertfunktionen
5. Spektralkoeffizienten und Klassifizierung der Schwellwertfunktionen
6. Schwellwertelementesynthese mit Hilfe der Summentabelle, Eigenschaften der Schwellwertfunktionen und Spektralkoeffizienten
7. Schlußbemerkungen

1. Einleitung

Das gestiegene Interesse an die Schwellwertlogik in den letzten Jahren wird hauptsächlich durch die Entwicklung der Bauelementebasis elektronischer Rechenanlagen bestimmt. In der Tat, die Schwellwertlogik bietet im Vergleich zur konventionellen Booleschen Logik und deren Realisierung mit AND-, OR-, NAND- usw. Gattern eine höhere logische Komplexität. Die letztlich erschienenen Veröffentlichungen zu Realisierungen des Schwellwertlogikkonzepts in Grundbausteinen der digitalen Informationsverarbeitung beweisen die noch zu erschließenden Potenzen auf diesem Gebiet. *Currents* und *Mows* Parallelzähler in vierwertiger Schwellwertlogik hat 50% weniger aktive und passive Bauelemente und logische Signalführungen als die bekannten Parallelzähler in binärer Logik [8]. Diese Einsparungen können dazu verwendet werden, mehr Signalverarbeitung je Chip einer gegebenen Fläche zu erzielen.

Die Anwendung der Schwellwertlogik beim Logikentwurf digitaler Schaltsysteme wird durch die noch schwierig zu bewältigende Aufgabe der Schwellwertelementesynthese [2] begrenzt. Die Walsh-Transformation, insbesondere die Rademacher-Walsh-Transformation [1], eröffnet neue Möglichkeiten zur Schwellwertelementesynthese und zur Klassifizierung der Schwellwertfunktionen. [1, 3, 5]

Das Anliegen dieses Artikels ist, eine neue und einfachere Methode der direkten Erkennung einer Schwellwertfunktion aus dem Rademacher-Walsh-Spektrum und der Bestimmung ihrer Schwellwertelementrealisierung unter Verwendung der in diesem Spektrum enthaltenen Informationen über die Schwellwertfunktion zu erschließen.

¹ Dipl.-Ing. Juri Todorow, Sektion Informationstechnik, Bereich Bauelemente und Systeme, Technische Universität Dresden, DDR-8027 Dresden, Mommsenstraße 13.

2. Die Rademacher-Walsh-Transformation als Modifikation der diskreten Walsh-Transformation

Angesichts der Vielzahl ihrer Anwendungsmöglichkeiten gewinnt die Walsh-Transformation, insbesondere die diskrete Walsh-Transformation, immer mehr an Bedeutung [1].

Die diskreten Walsh-Funktionen $w_{II}(k, t)$ sind Abbildungen der Art:

$$\{w_{II}(k, t)\} : (N(n) \times N(n)) \rightarrow \{+1, -1\},$$

mit $N(n) = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$

$t \in N(n)$, Abtastzeitpunkt

$k \in N(n)$, Ordnung der Walsh-Funktion

$II = 2^n$, Orthogonalitätsintervall, $n \in \mathbb{N}$, beliebig.

Die Menge der diskreten Walsh-Funktionen für ein festes II wird in der Matrix $W(II) = W_{II}(k, t)$ zusammengefaßt. Diese wird als Matrix der diskreten Walsh-Funktionen bezeichnet.

Die Menge der 01-Walsh-Funktionen $\{w_{01II}(k, t)\}$ ist durch die Abbildung

$$\{w_{01II}(k, t)\} : (N(n) \times N(n)) \rightarrow \{0, 1\}$$

definiert und bildet die Matrix $W_{01}(II)$. Dabei sind die Strukturen $(\{w_{II}(k, t)\}, \cdot)$ und $(\{w_{01II}(k, t)\}, \oplus)$ zueinander isomorph und die Abbildung $\{0, 1\} \varphi \{+1, -1\}$ ist eine bijektive Abbildung. Die Operationen \cdot und \oplus sind jeweils die komponentenweise gewöhnliche Multiplikation im Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen, bzw. die komponentenweise Addition modulo 2 ohne Übertrag in $\text{GF}(2)$.

Eine diskrete Rademacher-Funktion $\Phi_q(t)$ ist eine Abbildung

$$\Phi_q(t) : N(n) \rightarrow \{+1, -1\}$$

mit $t \in N(n)$, $q \in \{0, 1, \dots, n\}$

und besitzt ebenfalls eine 01-Modifikation $\Phi_{q01}(t)$

$$\Phi_{q01}(t) : N(n) \rightarrow \{0, 1\}.$$

Die Strukturen $(\{\Phi_q(t)\}, \cdot)$ und $(\{\Phi_{q01}(t)\}, \oplus)$ sind wiederum zueinander isomorph.

Die Walsh-Funktionen können als Produkte von Rademacher-Funktionen dargestellt werden. Die Reihenfolge der Produktbildung unterliegt einer festgelegten Ordnungsvorschrift, Rademacher-Ordnung genannt. Die Matrizen der Walsh-Funktionen in Rademacher-Ordnung $W_R(II)$ bzw. $W_{R01}(II)$ lauten, beispielsweise für $II = 8$ ($n = 3$):

$$W_R(8) = \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_1 \cdot \Phi_2 \\ \Phi_1 \cdot \Phi_3 \\ \Phi_2 \cdot \Phi_3 \\ \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_3 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad W_{R01}(8) = \begin{bmatrix} \Phi_{0\ 01} \\ \Phi_{1\ 01} \\ \Phi_{2\ 01} \\ \Phi_{3\ 01} \\ \Phi_{1\ 01} \oplus \Phi_{2\ 01} \\ \Phi_{1\ 01} \oplus \Phi_{3\ 01} \\ \Phi_{2\ 01} \oplus \Phi_{3\ 01} \\ \Phi_{1\ 01} \oplus \Phi_{2\ 01} \oplus \Phi_{3\ 01} \end{bmatrix}$$

mit $\Phi_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ bzw. $\Phi_{0\ 01} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
 $\Phi_1 = (1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$ $\Phi_{1\ 01} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$
 $\Phi_2 = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)$ $\Phi_{2\ 01} = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$
 $\Phi_3 = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$ $\Phi_{3\ 01} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$

Die Rademacher-Funktionen Φ_q werden als geordnete *Boolesche* Variablen bezeichnet in $\{+1, -1\} : x'_q(t) \in \{+1, -1\}$, bzw. Φ_{q01} in $\{0, 1\} : x_q(i) \in \{0, 1\}$, für $q \in \{1, 2, \dots, n\}$. Diese haben die Wortdarstellungen $x'_q = \langle x'_q(t) \rangle$ und $x_q = \langle x_q(t) \rangle$, $t \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ und die Vektordarstellungen $x'_q = (x'_q(0), \dots, x'_q(2^n - 1))$ und $x_q = (x_q(0), \dots, x_q(2^n - 1))$.

$$\begin{matrix} \mathbf{x}_1 = (x_1(0), \dots, x_1(i), \dots, x_1(2^n - 1)) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_j = (x_j(0), \dots, x_j(i), \dots, x_j(2^n - 1)) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n = (x_n(0), \dots, x_n(i), \dots, x_n(2^n - 1)) \end{matrix}$$

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt $i \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ entstehende n -Tupel wird mit $\mathbf{x}(i) = (x_1(i), \dots, x_j(i), \dots, x_n(i))$ bezeichnet.

Die diskrete Walsh-Transformation wird wie folgt definiert:

$$\hat{f}(k) = W_{II} \cdot f_{+1,-1}(t) \tag{1}$$

$$\hat{f}(k) = 2^n - 2^n(W_{01}(II) \oplus f_{01}(t)), \tag{2}$$

mit: $f_{+1,-1}(t) = \langle f_{+1,-1}(0), \dots, f_{+1,-1}(i), \dots, f_{+1,-1}(2^n - 1) \rangle$

diskrete Signalfolge in $\{+1, -1\}$, $f_{+1,-1}(i) \in \{+1, -1\}$,

$$f_{01}(t) = \langle f_{01}(0), \dots, f_{01}(i), \dots, f_{01}(2^n - 1) \rangle$$

diskrete Signalfolge in $\{0, 1\}$, $f_{01}(i) \in \{0, 1\}$

und als Spaltenvektoren der Länge 2^n :

$$f_{+1,-1}(t) = (f_{+1,-1}(0), \dots, f_{+1,-1}(2^n - 1))^T,$$

$$f_{01}(t) = (f_{01}(0), \dots, f_{01}(2^n - 1))^T$$

$$t \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$$

$$\hat{f}(k) = \langle \hat{f}(0), \dots, \hat{f}(i), \dots, \hat{f}(2^n - 1) \rangle$$

Bildwort mit $\hat{f}(i) \in |\mathbb{R}$

als Spaltenvektor der Länge 2^n :

$$\hat{f}(k) = (\hat{f}(0), \dots, \hat{f}(2^n - 1))^T$$

$$k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$$

$$2^n = \underbrace{(2^n, 2^n, \dots, 2^n)^T}_{n\text{-mal}}$$

W_{II} Matrix der diskreten Walsh-Funktionen,

$W_{01}(II)$ Matrix der 01Walsh-Funktionen.

Die Rademacher-Walsh-Transformation ist ein Sonderfall der diskreten Walsh-Transformation. Hier werden anstelle der Matrizen W_{II} bzw. $W_{01}(II)$ die entsprechenden Matrizen in Rademacher-Ordnung $W_R(II)$ bzw. $W_{R01}(II)$ zur Transformation einer diskreten Signalfolge verwendet. Das so entstandene Spektrum spiegelt wesentliche Eigenschaften der transformierten Signalfolge, die zu einer Realisierung einer Booleschen Funktion gehören kann, wider. Das Rademacher-Walsh-Spektrum wurde von *Edwards*

[5] zur Klassifizierung Boolescher Funktionen von vier Variablen verwendet. Dabei fand sich eine Bestätigung und Erweiterung der von Chow [6] und Dertouzos [4] erzielten Ergebnisse. Das Rademacher-Walsh-Spektrum wird in der Form

$$R = \langle R_0, R_1, \dots, R_n, R_{12}, R_{13}, \dots, R_{(n-1)n}, \dots, R_{12\dots n} \rangle$$

oder als Spaltenvektor der Länge 2^n

$$R = (R_0, R_1, \dots, R_n, R_{12}, R_{13}, \dots, R_{(n-1)n}, \dots, R_{12\dots n})^T$$

angegeben.

Dabei sind:

$$R_0 \text{ der Spektralkoeffizient 0-ter Ordnung } \binom{n}{0} = 1$$

$$R_1, \dots, R_n \text{ die } \binom{n}{1} = n \text{ Spektralkoeffizienten 1-ter Ordnung,}$$

$$R_{12}, \dots, R_{(n-1)n} \text{ die } \binom{n}{2} \text{ Spektralkoeffizienten 2-ter Ordnung,}$$

⋮
⋮
⋮

$$R_{12\dots n} \text{ der Spektralkoeffizient } n\text{-ter Ordnung, } \binom{n}{n} = 1.$$

Die Transformationsgleichungen lauten:

$$R = W_R(II) \cdot f_{+1,-1}(t) \quad (3)$$

$$R = 2^n - 2(W_{R01}(II \oplus) f_{01}(t)) \quad (4)$$

$$R_i \in |\mathbb{R}, \in \{0, 1, \dots, n, 12, \dots, (n-1)n, \dots, 12\dots n\}$$

3. Zur Berechnung der Spektralkoeffizienten

Wegen der einfacheren Berechnungsvorschrift empfiehlt es sich, die Ermittlung des Rademacher-Walsh-Spektrums nach Formel (3) vorzunehmen. Bei höheren Werten von II wächst die Dimension der Matrix $W_R(II)$ über die rechentechnisch vertretbaren Grenzen hinaus, von der gestiegenen Schwierigkeit der Bestimmung der unteren $n+1, \dots, 2^n-1$ Zeilen der Matrix als komponentenweise Produkte der oberen $1, \dots, n$ Zeilen, die die Rademacher-Funktionen verkörpern, ganz abgesehen.

Zur Berechnung der Zeilen $0, \dots, n$ der Matrix $W_R(II)$ wird folgender Algorithmus empfohlen:

```

begin m := 2 · n;
  for i := 1 step 1 until n + 1 do
    begin for j := step 1 until m do
      wr[i, j] := 1
    end;
    k := m; i := 1;
  a: i := i + 1; z := k := k/2; y := 2 · k;
  b: for j := k + step 1 until y do
    wr[i, j] := -1;
    if y < m then begin k := y + z; y := y + 2 · z;
      goto b
    end;
  k := z;
  if i ≤ n then goto a
end;
end;
```

Nach Vorgabe der Reihenfolge zur Berechnung der übrigen $2^n - (n + 1)$ Zeilen von $W_R(\Pi)$ in der $(2^n - (n + 1)) \times (n + 1)$ - Matrix HL wird der a -te Spektralkoeffizient $R_a, a \in \{0, 1, \dots, n, 12, \dots, (n - 1)n, \dots, 12 \dots n\}$ bestimmt:

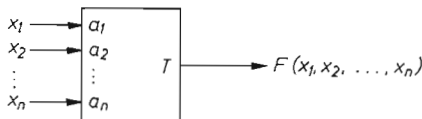
```

begin m := 2 · n;
  for j := 1 step 1 until m do
    b[j] := 1;
    if a ≥ n + 1 then begin for i := 1 step 1 until n do
      begin s := hl[a, i];
        for j := 1 step 1 until m do
          b[j] := b[j] · wr[s, j]
        end;
      end
    else begin for j := 1 step 1 until m do
      b[j] := wr[a, j]
    end;
    end;
  for j := 1 step 1 until m do
    e[j] := b[j] · f[j]; e[∅] := ∅;
    for i := 1 step 1 until m do
      e[i] := e[i] + e[i - 1]; ra[a] := e[m]
    end;
end;

```

4. Schwellwertelemente und Schwellwertfunktionen

Ein Schwellwertelement ist ein logisches Netzwerk mit n gewichteten Eingängen und einem Ausgang, an welchem nur dann eine 1 erscheint, wenn die gewichtete Summe der Eingänge einen festgesetzten Schwellwert überschreitet.



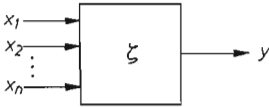
Die durch dieses Netzwerk realisierte Funktion mit Funktionswerten aus $\{0, 1\}$ heißt Schwellwertfunktion und wird wie folgt definiert:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq T \\ 0, & \text{wenn } \sum_{i=1}^n a_i x_i < T \end{cases} \tag{5}$$

$a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ heißen Wichtungen, $a_i \in |\mathbb{G}|$,
 $T \in |\mathbb{G}|$ heißt Schwellwert,
 $x_i \in \{0, 1\}$ sind Boolesche Variablen,
 $n \in \mathbb{N}$, fest.

T und $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ sind frei wählbare Parameter zur Bestimmung von $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Aus der Definition des Schwellwertelementes ist zu erkennen, daß durch die Möglichkeit der freien Wahl der Wichtungen und des Schwellwertes die Fähigkeit des Schwellwertelementes resultiert, nicht nur eine, sondern mehrere Boolesche Funktionen zu realisieren, ohne dessen Struktur verändern zu müssen. Ein Schwellwertelement bestimmter Eingangszahl n realisiert sämtliche Schwellwertfunktionen von n Variablen durch Variation von $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ und T . Jede Schwellwertfunktion ist durch ihre Realisierung $[a_1, a_2, \dots, a_n; T]$ charakterisierbar. Die Synthese des Schwellwertelementes beschränkt sich allein auf die Bestimmung seiner freien Parameter.

Das Schwellwertelement als Automat:



Ein Schwellwertelement ist eine algebraische Struktur $S = (X, Y, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \{T\}, \zeta)$. Dabei bedeuten:

X : Eingangsalphabet

$x_i \in X$, Eingangsbuchstabe $i \in \{1, \dots, n\}$

Y : Ausgangsalphabet

$y \in Y$, Ausgangsbuchstabe

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ Wichtungsmenge

$\{T\}$ Schwellwert

ζ ist eine Schwellwertfunktion.

Zur Definition von ζ ist die Einführung einer Hilfsfunktion $spr(u, v)$ notwendig.

$$spr(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u \geq v \\ 0, & \text{wenn } u < v. \end{cases}$$

Die Schwellwertfunktion ζ ist eine Abbildung der Art

$$\zeta: X \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad \zeta(\mathbf{x}) = y = spr(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}^T, T) \quad (6)$$

mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Daraus ergibt sich das folgende Blockschaltbild des Schwellwertelementes:

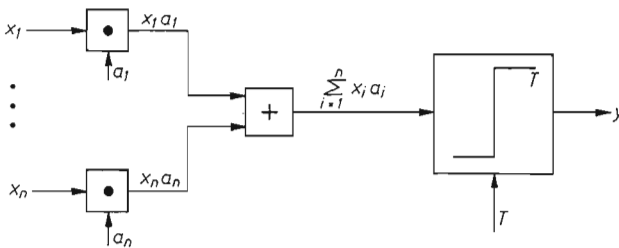


Abb. 1. Blockschaltbild des Schwellwertelementes

Das Schwellwertelement ist ein kombinatorischer Automat.

Die Eigenschaften der Schwellwertfunktionen lassen Rückschlüsse auf die Realisierbarkeit beliebiger Boolescher Funktionen durch ein Schwellwertelement ziehen. Jede Schwellwertfunktion ist $\left[\frac{n}{2} \right]$, d.h. vollständig monoton ($[z]$ ist die größte ganze Zahl $\leq z$). Die vollständige Monotonie ist äquivalent mit der 2-Asummierbarkeit und schließt die Homogenität (die Funktion ist positiv oder negativ in den vorkommenden Variablen) einer Booleschen Funktion ein. Die Schwellwertfunktionen werden mitunter als linear separierbare Funktionen bezeichnet, denn die aus (5) resultierenden Ungleichungen für $F = 1$ lassen sich von denen für $F = 0$ im n -dimensionalen Euklidischen Raum durch ein lineares Gebilde (Gerade, Ebene, Hyperebene) trennen. Die $\left[\frac{n}{2} \right]$ -Monotonie ist notwendig und hinreichend für die 1-Realisierbarkeit, d.h. Realisierbarkeit mit einem Schwellwertelement, einer gegebenen Schaltsfunktion $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \leq 8$ [7].

Die Ordnungsrelation \geq erzeugt auf der Menge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ der Variablen einer beliebigen 2-monotonen Schaltfunktion eine Klasseneinteilung mit deren Hilfe die Menge der Wichtungsparemetern $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ in Klassen steigenden Wichtungsbetrages zerfällt:

$$K_1 < K_2 < \dots < K_n$$

$$K_\nu \in \mathfrak{P}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}), \quad \nu \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Zwischen den Elementen a_i und a_j einer Wichtungsklasse K_ν ist die Beziehung $a_i = a_j$ für $i, j, \nu \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$, erfüllt. Die Relation \geq ist

reflexiv	$a_i \geq a_i$
transitiv	$a_i \geq a_j \wedge a_j \geq a_k \Rightarrow a_i \geq a_k$
antisymmetrisch	$a_i \geq a_j = a_j \geq a_i$
identitiv	$a_i \geq a_j \wedge a_j \geq a_i \Rightarrow a_i \geq a_j$

für $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \neq k$. Ist zwischen den Elementen der Mengen $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bzw. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ die Relation \geq hergestellt worden, so ist die betreffende Schaltfunktion 2-monoton. Bei $n \leq 5$, wegen $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$, heißt das, daß sie eine Schwellwertfunktion ist.

5. Spektralkoeffizienten und Klassifizierung der Schwellwertfunktionen

Es sei eine beliebige Signalfolge $f_{01}(t) = \langle f_{01}(0), f_{01}(1), \dots, f_{01}(2^n - 1) \rangle$, die zur Schaltfunktion $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gehört, gegeben. Diese ist zur Signalfolge $f_{+1,-1}(t)$ in der Struktur $(\{+1, -1\}, \cdot)$ isomorph $(\{0, 1\} \leftrightarrow \{+1, -1\}, \oplus \leftrightarrow \cdot)$. Mit Hilfe der Gleichung (3) wird das Rademacher-Walsh-Spektrum von $f_{+1,-1}(t)$ berechnet:

$$R = \langle R_0, R_1, \dots, R_n, R_{12}, \dots, R_{(n-1)n}, \dots, R_{12\dots n} \rangle.$$

Im Spektralbereich der Rademacher-Walsh-Transformation sind folgende Operationen definiert:

1. Vertauschen der Spektralkoeffizienten 1-ter Ordnung
2. Negation von R_0
3. Negation eines Spektralkoeffizienten 1-ter Ordnung
4. Negation aller Spektralkoeffizienten
5. Spektraltranslation zwischen R_0 und den Koeffizienten 1-ter Ordnung
6. Spektraltranslation zwischen den Koeffizienten 1-ter und ν -ter Ordnung, $\nu \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Diese verursachen folgende Veränderungen der Ausgangsfunktion $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

1. Vertauschen der Variablen
2. Dualisierung der Funktion
3. Negation der Variablen
4. Negation der Funktion
5. Vorwärtssignalführung
6. Antivalenzschaltung von $x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit den dem Indexausdruck ν -ter Ordnung entsprechenden Variablen.

Die ersten vier Operationen verändern nicht die Eigenschaft einer beliebigen Booleschen Funktion, eine Schwellwertfunktion zu sein. Die Schwellwertfunktion ist bezüglich diesen Operationen invariant. Um so mehr, aus einer bestimmten Schwellwertfunktion, deren Realisierung bekannt ist, können die Realisierungen anderer Schwellwertfunktionen gewonnen werden, indem man die genannten Operationen anwendet. Damit erhält man für Schwellwertfunktionen mit vier Variablen 7 Ursprungsfunktionen, die die Grundlage zur Synthese weiterer, auf diese zurückführbaren Schwellwertfunktionen,

bilden. Die Ursprungsfunktionen werden durch ihr Spektrum repräsentiert. Die von *Edwards* ermittelte Tabelle der Vertreter von disjunktiv-translationsäquivalenten Funktionen [5], oder die charakteristischen Vektoren nach *Dertouzos* [4], bzw. die Chow-Parameter [6] sind die bekannten Möglichkeiten für die Repräsentation der Schwellwertfunktionen. *Edwards* führte die Operationen 5 und 6 ein, um Schaltfunktionen, die keine Schwellwertfunktionen sind, dennoch durch ein Schwellwertelement mit äußerer Beschaltung realisieren zu können.

Die Anwendung der Operationen 1 bis 4 im Spektralbereich der Rademacher-Walsh-Transformation auf das Spektrum einer beliebigen Booleschen Funktion hat die Vertauschung von Spektralkoeffizienten innerhalb der Koeffizienten 1-ter und innerhalb der Koeffizienten 2, 3, ..., n -ter Ordnung bzw. ein Vorzeichenwechsel bestimmter Spektralkoeffizienten zur Folge. Für die Repräsentation einer Ursprungsfunktion ist also die Summe der Beträge der Spektralkoeffizienten 0-ter und 1-ter Ordnung und die Summe der Beträge der Spektralkoeffizienten 2-ter, ..., n -ter Ordnung von relevanter Bedeutung.

Es seien

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= |R_0| + |R_1| + \dots + |R_n| \\ \alpha_2 &= |R_{12}| + \dots + |R_{(n-1)n}| + \dots + |R_{12\dots n}| \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

die Summenkoeffizienten einer beliebigen Booleschen Funktion von n Variablen. Es läßt sich folgende Tabelle von Ursprungsfunktionen für $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ ermitteln, die die gleiche Aussagekraft wie die Tabellen nach *Edwards*, *Dertouzos* und *Chow* besitzt. Im weiteren sei diese als Summentabelle bezeichnet.

Tabelle 1. Summentabelle für $n = 2, 3, 4, 5$

	$n = 2$		$n = 3$			$n = 4$							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
α_1	4	6	8	12	12	16	22	24	24	26	28	30	
α_2	0	2	0	4	8	0	22	16	8	26	20	26	
	$n = 5$												
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
α_1	32	40	44	48	48	48	52	52	52	52	56	56	56
α_2	0	52	44	16	32	64	44	56	60	64	40	56	64
								26	27	28	29	30	31
							α_1	56	60	60	60	60	60
							α_2	76	52	72	76	84	88

Jede Schaltfunktion ist durch die Zahlenfolge ihrer Summenkoeffizienten $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ darstellbar. In der Summentabelle sind die Summenkoeffizienten aller Schwellwertfunktionen für $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ zusammengestellt. Für $n = 5$ reduziert sich die Anzahl der Repräsentanten von Schwellwertfunktionen von 21 auf 19, denn für die Funktionen mit den Spektren

$$R^1 = \langle 18, 10, 10, 10, 6, 6, -14, -6, -2, -2, -6, -2, -2, -2, -2, -6, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 2, 2, 6, 6, 2, 2, 2, -6 \rangle$$

und

$$R^2 = \langle 14, 14, 14, 6, 6, 6, -18, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -6, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 6, 6, 6, 6, -2, -2, -2 \rangle$$

bzw.

$$R^3 = \langle 18, 14, 10, 6, 6, 2, -10, -6, -6, -2, -2, -2, 2, 2, -2, -2, 2, 2, -2, -2, 2, 2, -6, -2, -2, 2, 6, 2, 2, -2, 2, -2 \rangle$$

und

$$R^4 = \langle 22, 10, 6, 6, 6, 6, -6, -6, -6, -6, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, -2, -2, -2, -2, 2, 2, 2, 2, 6, -6 \rangle$$

ergeben sich gleiche Summenkoeffizienten

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = 60 \quad \text{und} \quad \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 88$$

bzw.

$$\alpha_1^3 = \alpha_1^4 = 56 \quad \text{und} \quad \alpha_2^3 = \alpha_2^4 = 76.$$

Sind die zu einer beliebigen Schaltfunktion ($n \leq 5$) ermittelten Summenkoeffizienten $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ in der Summentabelle enthalten, so ist diese eine Schwellwertfunktion. Lassen sich für eine Schaltfunktion mit $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ keine äquivalenten Summenkoeffizienten in der Tabelle finden, so ist diese mit Sicherheit keine Schwellwertfunktion. Die Summenkoeffizienten α_1 und α_2 repräsentieren die Invarianz der Schwellwertfunktion gegenüber Permutation und Negation der Variablen bzw. der Funktion und Dualisierung der Funktion. Tritt eine Vertauschung von Spektralkoeffizienten 1-ter mit Spektralkoeffizienten höherer Ordnung auf, dann verändert sich die Summe α_1 bzw. α_2 , was eine Umformung einer Schwellwertfunktion zu einer nicht-Schwellwertfunktion gleichkame. Die nun entstandenen Summenkoeffizienten $\langle \alpha'_1, \alpha'_2 \rangle$ sind nicht mehr in der Tabelle auffindbar.

Ein Beispiel soll die Benutzung der Summentabelle verdeutlichen.

Beispiel 1: Gegeben sind die Signalfolgen

$$f_{+1,-1}(t) = \langle 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1 \rangle$$

und

$$f'_{+1,-1}(t) = \langle 1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1 \rangle,$$

$$2^n = 8 \rightarrow n = 3.$$

Dazu werden die Spektren

$$R = \langle 0, 4, 4, 4, 0, 0, 0, -4 \rangle$$

und

$$R' = \langle 0, 4, 4, 0, 0, -4, 4, 0 \rangle$$

ermittelt. Man bildet:

$$\alpha_1 = |R_0| + |R_1| + |R_2| + |R_3| = 0 + 4 + 4 + 4 = 12$$

und

$$\alpha_2 = |R_{12}| + |R_{13}| + |R_{23}| + |R_{123}| = 0 + 0 + 0 + |-4| = 4$$

bzw.

$$\alpha'_1 = |R'_0| + |R'_1| + |R'_2| + |R'_3| = 0 + 4 + 4 + 0 = 8$$

und

$$\alpha'_2 = |R'_{12}| + |R'_{13}| + |R'_{23}| + |R'_{123}| = 0 + |-4| + 4 + 0 = 8.$$

Die Zahlenfolge $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle 12, 4 \rangle$ ist in der Summentabelle enthalten, $\langle \alpha'_1, \alpha'_2 \rangle = \langle 8, 8 \rangle$ dagegen nicht. Die zu $f_{+1,-1}(t)$ gehörende Schaltfunktion ist eine Schwellwertfunktion.

Damit reduziert sich die Erkennung einer Schwellwertfunktion auf den Vergleich zweier Zahlen. Von den bestehenden Methoden zur Feststellung der 1-Realisierbarkeit einer Booleschen Funktion, wie die Feststellung der Verträglichkeit des Ungleichungssystems (5), die Überprüfung auf 2-Assumierbarkeit, bzw. vollständige Monotonie für Funktionen bis 8 Variablen, letztlich die Überprüfung auf k -Assumierbarkeit, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ für beliebige Funktionen, ist die hier dargestellte die einfachste. In

der Tabelle nach *Edwards* sind für $n = 4$ die vollen Rademacher-Walsh-Spektren von 7 Vertretern von Schwellwertfunktionen und einer nicht-Schwellwertfunktion dargestellt. Um aussagen zu können, ob eine gegebene Schaltfunktion eine Schwellwertfunktion ist oder nicht, muß man deren Spektrum behelfs der Operationen 1 bis 6 auf eine der dort angegebenen Formen bringen.

Beispiel 2: In der 3-ten Zeile der Tabelle nach *Edwards* steht das Spektrum einer Schwellwertfunktion, $F(x_1, \dots, x_4) = x_1 x_2 x_3$, $R = \langle 12, 4, 4, 4, 0, -4, -4, 0, -4, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0 \rangle$.

Es gilt $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle 24, 16 \rangle$, 8-te Spalte der Summentabelle. Es gibt aber noch zwei permutations- und negationsinvariante Schwellwertfunktionen mit $\langle 24, 16 \rangle$:

$$F'(x_1, \dots, x_4) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 x_4,$$

$$F''(x_1, \dots, x_4) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3.$$

Deren Spektren sind:

$$R' = \langle 0, 12, 4, 4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, -4, -4, -4, -4, 0 \rangle$$

und

$$R'' = \langle 4, 12, 4, 4, 0, -4, -4, 0, 4, 0, 0, -4, 0, 0, 0, 0 \rangle.$$

R'' wird zu R durch Anwendung der Operationen 5 und 3 und R' durch die Operationen 5, 3 und dreimalige Anwendung der Operation 6 umgeformt. Die Veränderung der Spektren ist jedoch in Wirklichkeit nicht erforderlich, denn F' und F'' sind 1-realisiert, was durch die Summentabelle bestätigt wird.

6. Schwellwertelementesynthese mit Hilfe der Summentabelle, Eigenschaften der Schwellwertfunktionen und Spektralkoeffizienten

Die Spektralkoeffizienten 1-ter Ordnung sind ein Maß für die Abhängigkeit der Schwellwertfunktion von der dem i -ten Spektralkoeffizienten, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entsprechenden Variable x_i . Je größer der Betrag des Spektralkoeffizienten, desto höher ist die Korrelation der Funktion mit dieser Variable. Ein negativer Spektralkoeffizient gehört zu einer negierten Variable und die Schwellwertfunktion ist negativ bezüglich dieser Variable. Gilt $R_i = 0$, so ist die Schwellwertfunktion von der Variable x_i unabhängig.

Die Strukturen $(\{|R_1|, |R_2|, \dots, |R_n|\}, \geq)$ und $(\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}, \geq)$ sind zueinander isomorph.

Mit Hilfe der Spektralkoeffizienten 1-ter Ordnung kann also die Unterteilung der Menge $\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$ in eine oder mehrere (höchstens n) Wichtungsklassen erfolgen:

$$|R_1| \geq |R_2| \geq \dots \geq |R_n| \rightarrow |a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_n|$$

und damit

$$K_1 < K_2 < \dots < K_n, \quad K_i \in \mathfrak{P}(\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}) \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Die zu einem Spektralkoeffizient $R_i = 0$ gehörende Wichtung a_i ist von der Wichtungsklassenbildung ausgeschlossen. Für diese gilt $a_i = 0$, demzufolge kann sie in der Realisierung entfallen. Vom praktischen Interesse ist die Bestimmung der minimal-ganzzahligen Realisierung der Schwellwertfunktion. Diese gewinnt man aus der vorliegenden Wichtungsklasseneinteilung, indem man den Wichtungen in der untersten Wichtungsklasse den kleinsten Wert, d.h. 1, zuordnet. Die Beträge der Wichtungen der nächsthöheren Wichtungsklassen unterscheiden sich um 1. Somit ist der Wichtungsvektor \mathbf{a} vollständig bestimmt. Zur Berechnung des Schwellwertes benötigt man die als gegeben vorausgesetzte Signalfolge $f_{-1,-1}(t)$ bzw. $f_{01}(t)$. $f_{01}(i)$, $i \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, sei der erste

Wert der Signalfolge mit $f_{01}(i) = 1$. Dazu gehört das Eingangstupel zum Zeitpunkt i $\mathbf{x}(i) = (x_1(i), x_2(i), \dots, x_n(i))$. Den Schwellwert T berechnet man nach der Formel:

$$\mathbf{x}(i) \cdot \mathbf{a}^T = T. \tag{8}$$

Somit erhält man die Realisierung $[a_1, a_2, \dots, a_n; T]$. Ist der Spektralkoeffizient R_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, negativ, so gilt $[a_1, a_2, \dots, -a_i, \dots, a_n; T - a_i]$. Diese Synthesemethode hat für Schwellwertfunktionen mit $n \leq 5$ volle Gültigkeit. In Anbetracht dessen, daß die Summentabelle bei $n = 5$ aufhört, ist hiermit ein sehr einfacher und schnell zu bewältigender Synthesalgorithmus, der den Vorteil einer vorzüglichen maschinellen Bearbeitbarkeit in sich birgt, aufgezeigt worden. Ein Beispiel soll die Vorgehensweise verdeutlichen.

Beispiel 3: Gegeben sei die Signalfolge

$$f_{01}(t) = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$$

bzw.

$$f_{+1,-1}(t) = \langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1 \rangle.$$

Man bestimmt das dazugehörige Spektrum

$$R = \langle 0, 12, 4, 4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, -4, -4, -4, -4, 0 \rangle,$$

$$\alpha_1 = |R_0| + |R_1| + |R_2| + |R_3| + |R_4| = 0 + 12 + 4 + 4 + 4 = 24,$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= |R_{12}| + |R_{13}| + |R_{14}| + |R_{23}| + |R_{24}| + |R_{34}| \\ &\quad + |R_{123}| + |R_{124}| + |R_{134}| + |R_{234}| + |R_{1234}| \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + |-4| + |-4| + |-4| + |-4| + 0 = 16. \end{aligned}$$

$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle 24, 16 \rangle$ ist in der Summentabelle unter Nr. 8 vorhanden. Die zu der gegebenen Signalfolge gehörende Funktion ist eine Schwellwertfunktion. Die Realisierung wird wie folgt bestimmt:

Wichtungsklasseneinteilung

$$|R_1| > |R_2| = |R_3| = |R_4| \rightarrow |a_1| > |a_2| = |a_3| = |a_4|$$

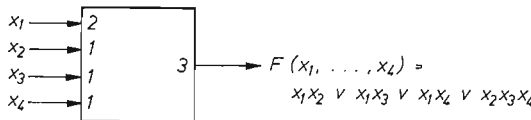
$$K_1 = \{a_2, a_3, a_4\}, \quad K_2 = \{a_1\}.$$

Die Wichtungen aus K_1 erhalten den Wert 1, die aus K_2 den Wert 2. Der Wichtungsvektor lautet

$$\mathbf{a} = (2, 1, 1, 1), \quad f_{01}(7) = 1 \rightarrow \mathbf{x}(7) = (0, 1, 1, 1)$$

$$T = \mathbf{x}(7) \cdot \mathbf{a}^T = (0, 1, 1, 1) \cdot (2, 1, 1, 1)^T = 3.$$

Da alle Spektralkoeffizienten 1-ter Ordnung positiv sind, gilt für die gegebene Signalfolge die Realisierung $[2, 1, 1, 1; 3]$.



Zur Signalfolge

$$f'_{01}(t) = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$$

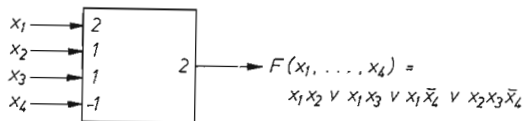
gehört das Spektrum

$$R' = \langle 0, 12, 4, 4, -4, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 4, 4, 4, 0 \rangle$$

$$\alpha'_1 = 24, \quad \alpha'_2 = 16.$$

Da $R_4 = -4$ ist die betrachtete Schwellwertfunktion negativ in x_4 . Ihre Realisierung lautet mit

$$T' = T - a_4 \quad \text{und} \quad a'_4 = -a_4: [2, 1, 1, -1; 2].$$



7. Schlußbemerkungen

In Anbetracht der Einfachheit und guten Programmierbarkeit des dargestellten Verfahrens zur Schwellwertelementesynthese, wurde hiermit eine zuverlässige Methode der Schwellwertelementrealisierung Boolescher Funktionen mit bis zu 5 Variablen erschlossen. Ein offenes Problem ist, ein Verfahren mit diesen Eigenschaften zu finden, das für alle Boolesche Funktionen volle Gültigkeit besitzt.

Schrifttum

- [1] *Janicke, O.*: Walsh-Funktionen in der Systemtheorie, Dissertation B, TU Dresden, 1980.
- [2] *Ajzenberg, N. N., A. A. Bovdi, E. J. Gergo, i E. F. Getsche*: Nekotorye algebraitscheskie aspekty porogovoj logiki. Kibernetika Nr. 2 (1980).
- [3] *Muzio, J. C.*: Composite Spectra and the Analysis of Switching Circuits, IEEE Trans. on Comp. C-29, Nr. 8 (1980).
- [4] *Devouzos, M. L.*: An Approach to Single-Threshold-Element Synthesis, IEEE Trans. on Comp. EC-13, Nr. 5 (1964).
- [5] *Edwards, C. R.*: The Application of the Rademacher-Walsh-Transform to Boolean Functions Classifikation and Threshold Logic Synthesis, IEEE Trans. on Comp. C-24, Nr. 1 (1975).
- [6] *Chow, C. K.*: On the Characterization of Threshold Functions AIEE Special Publication, Sept. 1961.
- [7] *Muroga, S., T. Tsuboi and C. R. Baugh*: Enumeration of Threshold Functions of Eight Variables, IEEE Trans. on Comp. C-19, Nr. 9 (1970).
- [8] *Current, K. W., and D. A. Mow*: Implementing Parallel Counters with Four-Valued Threshold Logic, IEEE Trans. on Comp. C-28, Nr. 3 (1979).
- [9] *Wunsch, G.*: Algebraische Grundbegriffe, Berlin: VEB Verlag Technik 1970.